MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
JENA

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY
E. HECKE G. HERGLOTZ O. PERRON
W. SÜSS W. THRELFALL H. WEYL

49. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 2. AUGUST 1943)

BERLIN
SPRINGER-VERLAG
1943

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreise berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Verfügung zwecks Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,
K. Knopp, Tübingen, Waldhäuser Straße 105,
R. Nevanlinna, Helsinki, Pietarink 5 a,
E. Schmidt, Berlin-Charlottenburg 2, Bismarckstraße 107,
F. K. Schmidt, Flughafen Ainring, Post Freilassing (Obb.).

---

49. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Claus, H. †: Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen 161

Lipka, Dr. St., Szeged (Ungarn), Baroß-Straße 2, Universität: Über die absolute Konvergenz von Polynomreihen 192

Zaubek, Dr. O., Schrems, Niederdonau, Pfarrgasse 11: Über nicht meßbare Punktmengen und nicht meßbare Funktionen 197

Knopp, Prof. Dr. K., Tübingen, Waldhäuser Straße 105: Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der *C*- und *H*-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen 219

Kamke, Prof. Dr. E., Tübingen, Eßlinger Straße 16: Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 256

Hlawka, Doz. Dr. E., Wien 40, Hainburger Straße 56/18: Zur Geometrie der Zahlen 285

Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen.

Von

Heinrich Claus † *).

Inhalt.

inleitung 161
1. Hilfsbetrachtungen 164
2. Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung n^α mit $0 < \alpha < 1$ . . 170
3. Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $\varphi(n)$ mit $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$ . . . 176
4. Zulassung von Ausnahmekoeffizienten in den Lücken 185

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, einige Bedingungen für die ichtfortsetzbarkeit eines Funktionselements zu beweisen, die die bekannten ückenbedingungen von HADAMARD und FABRY als Spezialfälle enthalten. abei wird ein Funktionselement der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \text{ [1]}$$

grunde gelegt, dessen Konvergenzradius endlich und positiv sein soll und her ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden kann, daß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

lt.

*) HEINRICH CLAUS war im Sommer 1939 Assistent am Mathematischen Seminar r Universität Rostock. Er wurde am 2. 10. 1941 im Osten schwer verwundet und am 21. 7. 1942 an den Folgen dieser Verwundung gestorben. Die vorliegende Arbeit ot im wesentlichen den Inhalt seiner Dissertation (D 28) wieder, die er während seiner sistentenzeit begonnen und im Sommer 1941, unmittelbar vor seinem Einsatz im ten, fertiggestellt hat. Für die Veröffentlichung habe ich eine teilweise Überarbeitung, besondere der §§ 3 und 4, vorgenommen. F. LÖSCH.

[1]) Diese Form des Funktionselements ist unwesentlich, aber für das Folgende etwas quemer als die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Der Hadamardsche Lückensatz besagt in einer bereits von Hadamard angegebenen etwas verschärften Form: Enthält die Folge (a_n) der Koeffizienten von $f(z)$ eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1 \tag{3}$$

derart, daß für ein ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ jeweils alle Koeffizienten a_n mit $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ außer a_{n_ν} selbst verschwinden, so ist $f(z)$ nicht in das Innere des Einheitskreises fortsetzbar. Es ist selbstverständlich, daß sich an der Aussage dieses Satzes nichts ändert, wenn die Lückenbedingung dahin abgeschwächt wird, daß die in den Umgebungen $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ der a_{n_ν} stehenden Koeffizienten a_n außer a_{n_ν} selbst nur „unwesentlich" sein sollen in dem Sinne, daß für ihre Gesamtheit $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$ gilt, so daß sie also das Regularitätsverhalten von $f(z)$ längs $|z| = 1$ nicht beeinflussen. Die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ kann aber auch dann noch behauptet werden, wenn in den Umgebungen $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ der a_{n_ν} nichtverschwindende Ausnahmekoeffizienten a_n vorhanden sind, die „wesentlich" sind in dem Sinne, daß für ihre Gesamtheit $\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ gilt, es darf dann nur die Anzahl dieser Ausnahmekoeffizienten nicht zu groß sein. Insbesondere ist nach Fabry die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ noch gesichert, wenn für die Anzahl $\psi(n_\nu)$ der in der Umgebung von a_{n_ν} auftretenden Ausnahmekoeffizienten die Beziehung

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\psi(n_\nu)}{n_\nu} = 0 \tag{4}$$

besteht. Weiter lassen sich in den genannten Sätzen die „zweiseitigen" Bedingungen durch „einseitige" ersetzen: Um die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ zu garantieren, genügt es, das Verschwinden der a_n mit $n_\nu(1-\vartheta) \leqq n < n_\nu$ *oder* mit $n_\nu < n \leqq n_\nu(1+\vartheta)$ zu fordern, und in den dadurch charakterisierten einseitigen Umgebungen der a_{n_ν} dürfen außer unwesentlichen noch wesentliche nichtverschwindende Ausnahmekoeffizienten in dem durch die Fabrysche Bedingung (4) gegebenen Umfange zugelassen werden [2]).

Es ist dagegen nicht möglich, die angeführten Sätze in der Weise zu verschärfen, daß man allgemein die durch ϑn gegebene Größenordnung der Lückenlängen reduziert. Vielmehr gibt es zu jeder gleichzeitig mit n gegen ∞ strebenden positiven Funktion $\varphi(n)$, für die nur $\frac{\varphi(n)}{n} \to 0$ gilt, Funktions-

[2]) Für Literaturangaben zu den vorstehend genannten Sätzen vgl. etwa F. Lösch, Über nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken. Math. Zeitschr. **32** (1930), S. 415—421, Fußnoten [1]) bis [5]).

mente (1), die in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar sind, wohl ihre Koeffizientenfolge (a_n) eine ausgezeichnete Teilfolge (3) enthält, r die jeweils alle a_n mit $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ außer a_{n_ν} selbst rschwinden[3]). Will man daher zu Nichtfortsetzbarkeitskriterien gelangen, e nur Lücken von kleinerer Größenordnung als ϑn fordern, so müssen zu r Lückenbedingung notwendig weitere Voraussetzungen über die Koeffi- ntenfolge hinzutreten. Wir werden zeigen, daß man dabei mit einer Voraus- zung über die Größenordnung der gesamten Koeffizientenfolge (a_n) aus- mmt, die in einfachster Weise mit der Voraussetzung über die Größen- dnung der geforderten Lücken zusammenhängt[4]). Ist $\varphi(n)$ eine positive, ichzeitig mit n monoton gegen ∞ strebende Funktion, die (außer in § 3 gegebenen unwesentlichen Voraussetzungen) den Bedingungen $\frac{\varphi(n)}{n} \to 0$, $\frac{n)}{n} \to \infty$ für $n \to \infty$ genügt, so ergibt sich zunächst in Analogie zum ADAMARDschen Lückensatz: Erfüllen die Koeffizienten (a_n) des Funktions- ments (1) die über (2) hinausgehende Bedingung

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$$

d enthält die Koeffizientenfolge eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

rart, daß jeweils alle a_n mit $n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ außer a_{n_ν} selbst rschwinden, so ist $f(z)$ nicht in das Innere des Einheitskreises fortsetzbar. e Behauptung des Satzes bleibt bestehen, wenn die Lückenbedingung dahin geschwächt wird, daß die Gesamtheit aller a_n, welche den Umgebungen $- \varphi(n_\nu) \leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ der Koeffizienten a_{n_ν} angehören, von den a_{n_ν} bst abgesehen, die Beziehung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

üllen (wobei zu beachten ist, daß diese Koeffizienten sehr wohl in dem engenannten Sinne „wesentlich" sein können). Darüber hinaus gilt aber Analogie zum FABRYschen Satze, daß die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$

[3]) Vgl. F. LÖSCH, a. a. O. [2]), Fußnote [6]).

[4]) Derartige Bedingungen finden sich bereits bei F. LÖSCH, a. a. O. [2]); vgl. elbst auch Fußnote [7]). Die im folgenden bewiesenen neuen Bedingungen hat mir rr Prof. F. LÖSCH (ohne die Voraussetzung $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$, von der bisher nicht ent- ieden werden konnte, ob sie notwendig ist) als Vermutung genannt; er hat mich auch der Durchführung der Beweise verschiedentlich unterstützt.

auch dann noch garantiert ist, wenn in den Umgebungen $n_\nu - \varphi(n$ $\leqq n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu)$ der Koeffizienten a_{n_ν} nichtverschwindende Ausnahme koeffizienten a_n vorhanden sind, für deren Gesamtheit

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

gilt, wenn nur die Anzahl $\psi(n_\nu)$ der in der Umgebung von a_{n_ν} stehende Ausnahmekoeffizienten die Beziehung

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\psi(n_\nu)}{\varphi(n_\nu)} = 0$$

erfüllt. Endlich lassen sich wieder wie bei den früheren Sätzen auch in den vorstehenden Nichtfortsetzbarkeitskriterien die „zweiseitigen" Bedingungen durch „einseitige" ersetzen.

In § 1 werden zunächst einige Hilfsbetrachtungen über gewisse Polynome die mit den zu einer Kurve gehörigen Tschebyscheffschen Polynomen eng zusammenhängen, und über Reihentransformationen angestellt, die für die Beweisführungen grundlegend sind. § 2 bringt sodann das Analogon des Hadamardschen Lückensatzes für den Spezialfall $\varphi(n) = n^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, der sich verhältnismäßig einfach erledigt, und zwar gleich in der „einseitigen" Form. In § 3 wird der allgemeine Fall, wieder in der einseitigen Form, behandelt, und in § 4 wird schließlich noch der Übergang zum Analogon des Fabryschen Satzes durchgeführt.

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Es sollen zunächst einige — zum Teil bekannte — Tatsachen zusammengestellt werden, die sich einerseits auf gewisse Polynome, andererseits auf Reihentransformationen beziehen und die für die späteren Betrachtungen grundlegend sind:

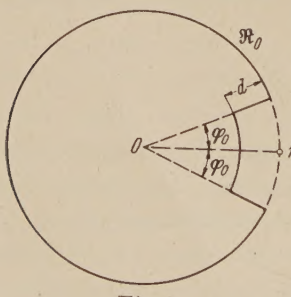

Fig. 1.

I. Ist das Funktionselement

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \quad \text{mit} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

im Randpunkt $z = 1$ des Konvergenzgebietes regulär, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_0$ einen den Punkt ∞ im Innern enthaltenden Bereich, dessen Rand $\mathfrak{R}_0$ von Kurvenstücken der Form

$$(2) \qquad \begin{aligned} z &= e^{i\varphi} && (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0 \text{ mit } 0 < \varphi_0 < \pi), \\ z &= r\, e^{\pm i\varphi_0} && (1 - d \leqq r \leqq 1 \text{ mit } 0 < d < 1), \\ z &= (1-d)\, e^{i\varphi} && (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0) \end{aligned}$$

bildet wird (vgl. Fig. 1) und der so beschaffen ist, daß $f(z)$ im Innern von $\mathfrak{B}_0$ wie in den durch

$$z = r\,e^{\pm i\varphi_0}\ (1-d \leqq r \leqq 1) \quad \text{und} \quad z = (1-d)\,e^{i\varphi}\ (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0)$$

gebenen Randpunkten von $\mathfrak{B}_0$ regulär ist. Allgemeiner bezeichnen wir dann r $\delta \geqq 0$ mit $\mathfrak{B}_\delta$ denjenigen den Punkt ∞ im Innern enthaltenden Bereich, ssen Rand $\mathfrak{R}_\delta$ von den Kurvenstücken

$$z = (1+\delta)\,e^{i\varphi} \qquad (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0),$$
$$z = r\,e^{\pm i\varphi_0} \qquad (1-d \leqq r \leqq 1+\delta),$$
$$z = (1-d)\,e^{i\varphi} \qquad (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0)$$

bildet wird (vgl. Fig. 2). Für $\delta = 0$ ergibt ch wieder der oben geschilderte Bereich $\mathfrak{B}_0$. ir $\delta > 0$ liegt $\mathfrak{B}_\delta$ in $\mathfrak{B}_0$ und $f(z)$ ist im Innern id auf dem Rand von $\mathfrak{B}_\delta$ regulär.

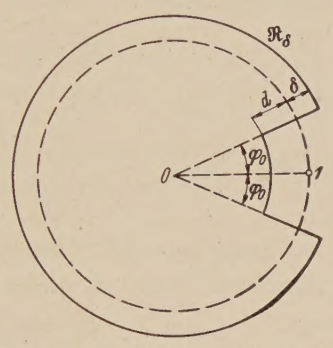

Fig. 2.

Bettet man $\mathfrak{R}_0$ in ein Gebiet $\mathfrak{G}$ ein, so hört diesem Gebiet auch jede Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ mit nreichend kleinem $\delta > 0$ an. Für uns wird es dabei wesentlich sein, ß sich $\mathfrak{G}$ gemäß den beiden folgenden Hilfssätzen wählen läßt[5]):

Hilfssatz 1. *Zu der Kurve $\mathfrak{R}_0$ gibt es ein dieselbe enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$, r das eine Folge von Polynomen $Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots$ der Form*

$$Q_n(z) = z^n + q_1^{(n)} z^{n-1} + \cdots + q_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

n Θ mit $0 < \Theta < 1$ und ein $n_0 > 0$ existiert derart, daß in $\mathfrak{G}$

$$|Q_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq n_0$$

lt.

Beweis. a) Wir zeigen zunächst, daß es ein Polynom

$$) \qquad Q(z) = z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_q$$

bt, für das längs $\mathfrak{R}_0$ und sogar in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abhätzung

$$) \qquad |Q(z)| < \tfrac{1}{2}$$

lt. Dazu bemerken wir, daß sich nach Runge die Funktion $-z$ längs s durch

$$z = e^{i\varphi}\ (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0) \quad \text{und} \quad z = r\,e^{\pm i\varphi_0}\ (1-d \leqq r \leqq 1)$$

gebenen Teils der Kurve $\mathfrak{R}_0$ (weil sich dieser Teil in ein den Punkt $z = 0$ cht enthaltendes, einfach zusammenhängendes Regularitätsgebiet von $-z$

[5]) Vgl. dazu G. Szegö, Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare tenzreihen. Math. Ann. 87 (1922), S. 90—111.

einbetten läßt) beliebig genau durch Polynome in $\frac{1}{z}$ approximieren läß
Es existiert also z. B. ein derartiges Polynom $a_1 + \frac{a_2}{z} + \cdots + \frac{a_p}{z^{p-1}}$, m
dem längs des genannten Teils von $\mathfrak{R}_0$

$$\left| z + a_1 + \frac{a_2}{z} + \cdots + \frac{a_p}{z^{p-1}} \right| < \frac{1}{2},$$

also erst recht

$$|z^p + a_1 z^{p-1} + a_2 z^{p-2} + \cdots + a_p| < \tfrac{1}{2} \tag{5}$$

gilt. Da auf dem restlichen Teil

$$z = (1 - d)\, e^{i\varphi} \quad (-\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0)$$

von $\mathfrak{R}_0$ gewiß

$$|z^p + a_1 z^{p-1} + \cdots + a_p| < M$$

mit passendem $M > 0$ gilt, so ergibt sich durch Multiplikation mit eine
passenden Potenz $z^{p'}$ längs dieses Teiles von $\mathfrak{R}_0$

$$|z^{p+p'} + a_1 z^{p+p'-1} + \cdots + a_p z^{p'}| < \tfrac{1}{2}. \tag{6}$$

Die Abschätzungen (5) und (6) besagen zusammen, daß für das Polyno

$$Q(z) = z^q + a_1 z^{q-1} + \cdots + a_p z^{q-p} \qquad (q = p + p$$

längs der ganzen Kurve $\mathfrak{R}_0$ die Abschätzung

$$|Q(z)| < \tfrac{1}{2}$$

gilt. Und diese Abschätzung gilt endlich aus Stetigkeitsgründen auch noc
in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$.

b) Nun schließen wir vollends so weiter: Wir bilden die Folge von Poly
nomen $Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots$ mit

$$Q_n(z) = z^t\, Q^s(z) \quad \text{für } n = sq + t \quad (0 \leqq t < q).$$

Da $\mathfrak{G}$ vermöge (4) gewiß beschränkt ist, so gilt in $\mathfrak{G}$

$$|z^{q-1}| \leqq K$$

für eine passende Schranke $K\,(>1)$ und damit ergibt sich

$$|Q_n(z)| = |Q_{sq+t}(z)| \leqq K\,|Q(z)|^s \leqq K\left(\tfrac{1}{2}\right)^s \leqq K\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-t}{q}} < 2K\left(\sqrt[q]{\tfrac{1}{2}}\right)^n.$$

Hieraus entnimmt man unmittelbar die Behauptung des Satzes.

Hilfssatz 2. *Zu der Kurve $\mathfrak{R}_0$ gibt es ein dieselbe enthaltendes Gebiet $\mathfrak{G}$ für das eine Folge von Polynomen $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z), \ldots$ der Form*

$$P_n(z) = z^{m_n} + p^{(n)}_{n-m_n-1} z^{m_n+1} + \cdots + p^{(n)}_0 z^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots$$

ein Θ mit $0 < \Theta < 1$ und ein $n_0 > 0$ existiert derart, daß in $\mathfrak{G}$

$$|P_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq n_0$$

gilt.

Beweis. a) Ähnlich wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 zeigen wir hier nächst, daß es ein Polynom

$$P(z) = z^{q-p} + c_1 z^{q-p+1} + \cdots + c_p z^q \qquad (q - p \geqq 0)$$

bt, für das längs $\mathfrak{R}_0$ und sogar in einem $\mathfrak{R}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abhätzung

$$|P(z)| < \tfrac{1}{2}$$

lt. Dazu approximieren wir nach Runge die Funktion $-\frac{1}{z}$ längs des durch

$$z = e^{i\varphi} \ (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq 2\pi - \varphi_0) \quad \text{und} \quad z = r e^{\pm i\varphi_0} \ (1 - d \leqq r \leqq 1)$$

gebenen Teils von $\mathfrak{R}_0$ auf die Genauigkeit $\frac{1}{2}$ durch ein Polynom $c_1 + c_2 z + \cdots + c_p z^{p-1}$. Es gilt dann längs des genannten Teils von $\mathfrak{R}_0$

$$\left| \frac{1}{z} + c_1 + c_2 z + \cdots + c_p z^{p-1} \right| < \tfrac{1}{2}$$

nd damit erst recht

$$|1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_p z^p| < \tfrac{1}{2}.$$

ie beim Beweis des Hilfssatzes 1 schließt man nun durch Multiplikation it einer passenden Potenz $z^{p'}$ weiter, daß längs des restlichen Teils von $\mathfrak{R}_0$

$$|z^{p'} + c_1 z^{p'+1} + \cdots + c_p z^{p'+p}| < \tfrac{1}{2}$$

lt. Die Abschätzungen (7) und (8) besagen zusammen, daß für das Polynom

$$P(z) = z^{q-p} + c_1 z^{q-p+1} + \cdots + c_p z^q \qquad (q = p + p')$$

e Abschätzung

$$|P(z)| < \tfrac{1}{2}$$

ngs der ganzen Kurve $\mathfrak{R}_0$ und aus Stetigkeitsgründen auch noch in einem $\mathfrak{R}_0$ thaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ gilt.

b) Die Existenz der im Satz behaupteten Polynomfolge $P_0(z), P_1(z), \ldots, (z), \ldots$ erschließt man nun vollends genau wie beim vorhergehenden Satz.

II. Bei der Untersuchung des Regularitätsverhaltens des Funktionsments (1) im Randpunkt $z = 1$ des Konvergenzgebietes werden wir uns ederholt einer geeigneten sogenannten *„E-Transformation"* bedienen[6]). e besteht darin, daß man in

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

Stelle von $\frac{1}{z}$ den Ausdruck

$$\frac{1}{z} E(u) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2}(1 + u) u^k \qquad (k \text{ beliebige natürliche Zahl})$$

[6]) Vgl. dazu F. Lösch, Lückensätze und Überkonvergenz bei zweifachen Potenzhen. Math. Zeitschr. **36** (1932), S. 202—262, insbes. S. 207—213.

einführt, nach Potenzen von u umordnet und in der so entstehenden Reih

$$F(u;z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(\frac{1}{z}\right) u^m$$

noch $u = 1$ setzt. Es ergibt sich so eine Polynomreihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m\left(\frac{1}{z}\right), \tag{9}$$

die „E-Transformation" der ursprünglichen Reihe (1).

Wir haben zunächst einige Tatsachen über den Bau der Polynome $A_m\left(\frac{1}{z}\right.$ zusammenzustellen: Allgemein ist $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ von der Form

$$A_m\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{\mu=m'}^{m''} \Gamma_m^{\mu} \frac{a_\mu}{z^{\mu+1}},$$

wo die Gewichte Γ_m^{μ}, mit denen die Glieder $a_\mu/z^{\mu+1}$ von $f(z)$ eingehen, gewiss positive Zahlen sind. Wir werden für unsere Zwecke speziell die Folge de Polynome

$$A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{mit} \quad n^* = k(n+1) + \left[\frac{n+1}{2}\right] \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

heranziehen; über ihren Bau benötigen wir die in den folgenden Satz zu sammengefaßten Tatsachen:

Hilfssatz 3. a) *Das Polynom* $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ *enthält das Glied* a_n/z^{n+1}. *Danebe enthält* $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ *für beliebiges* $\vartheta > 0$, *falls* $k > \frac{1}{\vartheta}$ *gewählt wird, nur Gliede* $a_\mu/z^{\mu+1}$ *mit*

$$n(1-\vartheta) \leqq \mu \leqq n(1+\vartheta).$$

b) *Das Gewicht* $\Gamma_{n^*}^n$, *mit dem* a_n/z^{n+1} *in das Polynom* $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ *eingeh erfüllt für genügend großes* n *mit zwei positiven Konstanten* α *und* α' $(\alpha < \alpha$ *die Ungleichungen*

$$\frac{\alpha}{\sqrt{n}} < \Gamma_{n^*}^n < \frac{\alpha'}{\sqrt{n}}.$$

c) *Die Summe der Gewichte* $\Gamma_{n^*}^n$ *in* $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ *— allgemeiner die Summe d Gewichte* Γ_m^{μ} *in einem beliebigen Polynom* $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ *— ist kleiner als Ein*

Beweis. a) Tritt $a_\mu/z^{\mu+1}$ in $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ auf, so muß nach der Definitio der Polynome $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ offenbar $k(\mu+1) \leqq n^*$ und $(k+1)(\mu+1) \geqq n$ sein. Hieraus entnimmt man mühelos die Behauptung.

b) Das Glied a_n/z^{n+1} besitzt in $A_{n^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ das Gewicht

$$\Gamma_{n^*}^{n} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Hieraus folgt die behauptete Abschätzung auf Grund der Ungleichungen

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{en} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n e\sqrt{n}.$$

c) Um allgemein die Summe der Gewichte in $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ zu erhalten, bildet man

$$S_k(u) = 1 + \tfrac{1}{2}(1+u)u^k + [\tfrac{1}{2}(1+u)u^k]^2 + \cdots + [\tfrac{1}{2}(1+u)u^k]^n + \cdots.$$

Ordnet man hier nach Potenzen von u um, so erscheint die gesuchte Summe in der umgeordneten Reihe als Koeffizient von u^m.

Faßt man zunächst den Fall $k = 1$ ins Auge, so erhält man

$$\begin{aligned} S_1(u) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}(1+u)u} &= \frac{1}{(1-u)(1+\frac{1}{2}u)} \\ &= (1+u+u^2+\cdots)\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2^2}-\cdots\right) \\ &= 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)u+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)u^2+\cdots+ \\ &\quad +\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^m\frac{1}{2^m}\right)u^m+\cdots. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\sum_{\mu} \Gamma_m^{\mu} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^m\frac{1}{2^m} < 1.$$

Um auch den Fall $k > 1$ zu erledigen, vergleicht man die für beliebiges ganzes $k > 1$ gebildeten Polynome $A_m\left(\frac{1}{z}\right)$ mit den für $k = 1$ gebildeten. Man erkennt dann ohne weiteres, daß jedes zu $k > 1$ gehörige Polynom eine Gewichtssumme besitzt, die kleiner ist als die Gewichtssumme eines geeigneten zu $k = 1$ gehörigen Polynoms. Die Behauptung des Satzes gilt also auch für $k > 1$.

Was nun weiter die funktionentheoretischen Eigenschaften der E-Transformation (9) betrifft, so kommt ihre Bedeutung für unsere Zwecke in dem folgenden Satz zum Ausdruck:

Hilfssatz 4. *Das Funktionselement $f(z)$ ist im Punkte z_0 auf dem Rand des Konvergenzgebietes $|z| > 1$ dann und nur dann regulär, wenn es eine Umgebung $\mathfrak{U}(z_0)$ von z_0 und eine positive Zahl $h < 1$ gibt derart, daß für alle Punkte z aus $\mathfrak{U}(z_0)$ gilt:*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\left|A_m\left(\frac{1}{z}\right)\right|} \leqq h < 1.$$

Die E-Transformation (9) *von* $f(z)$ *konvergiert stets in* $|z| > 1$ *und stimmt dort mit* $f(z)$ *überein; ist* $f(z)$ *in* z_0 *regulär, so konvergiert sie überdies normal in* $\mathfrak{U}(z_0)$ *und stellt dort die analytische Fortsetzung von* $f(z)$ *dar.*

Wir werden diesen Satz, für dessen Beweis auf die in Fußnote[6]) genannte Arbeit verwiesen sei, in der folgenden Weise anwenden: Für beliebiges ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ sei $n_1 < n_2 < \cdots < n_\nu < \cdots$ eine Folge natürlicher Zahlen, für die

$$n_\nu(1+\vartheta) < n_{\nu+1}(1-\vartheta) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

gelte. Wendet man dann auf das Funktionselement (1) die beschriebene E-Transformation mit $k > \frac{1}{\vartheta}$ an und bildet

$$f^*(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right), \tag{10}$$

so erhält man nach Hilfssatz 3a) durch Aufspalten der Polynome $A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ in ihre einzelnen Glieder eine Potenzreihe. Nach Hilfssatz 3c) ist diese Potenzreihe gewiß in $|z| > 1$ konvergent, und nach Hilfssatz 3b) ist $|z| > 1$ ihr genaues Konvergenzgebiet, falls die Indizes n_ν so gewählt sind, daß

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} = 1$$

gilt. Ist ferner $f(z)$ im Punkte $z = 1$ regulär, so gilt dasselbe von $f^*(z)$, da in diesem Falle die Reihe (10) nach Hilfssatz 4 in einer Umgebung von $z = 1$ normal konvergiert. Läßt sich danach zeigen, daß $f^*(z)$ an der Stelle $z = 1$ singulär ist, so gilt dasselbe von $f(z)$.

§ 2.

Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung n^α mit $0 < \alpha < 1$.

In Analogie zum Hadamardschen Lückensatz mit einseitiger Lückenbedingung (vgl. die Einleitung) läßt sich für Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $n^\alpha (0 < \alpha < 1)$ der folgende Satz aussprechen:

Satz 1. *Das in* $|z| > 1$ *reguläre Funktionselement*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

ist nicht in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar, wenn seine Koeffizienten für ein α *mit* $0 < \alpha < 1$ *die folgenden Bedingungen erfüllen:*

a) Es ist $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n^\alpha}} = 1.$

b) Die Folge (a_n) enthält eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} = 1$$

derart, daß für die Gesamtheit aller a_n aus den linksseitigen Umgebungen

$$n_\nu - n_\nu^\alpha \leqq n < n_\nu \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder für die Gesamtheit aller a_n aus den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + n_\nu^\alpha \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

die Limesbeziehung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} < 1$$

besteht.

Beweis. Da aus der Voraussetzung a) gewiß

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

folgt, so hat das Funktionselement $f(z)$ den Konvergenzradius 1. Wir zeigen, daß $z = 1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist. Da sich alle Voraussetzungen nur auf die Beträge der Koeffizienten a_n beziehen, folgt hieraus unmittelbar die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$.

1. Wir schätzen zunächst das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ längs eines Kreises $|z| = 1 + \delta$ $(\delta > 0)$ ab. Bezeichnen wir dieses Maximum mit $M(1+\delta)$, so gilt

$$M(1+\delta) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n}.$$

Nach Voraussetzung a) ist bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ von einem Index $N = N(\varepsilon)$ ab

$$|a_n| \leqq e^{\varepsilon n^\alpha},$$

also

$$(1) \quad M(1+\delta) \leqq \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} < \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon n^\alpha}}{(1+\delta)^n}.$$

Für die erste Summe genügt die für alle $\delta > 0$ gültige Abschätzung

$$(2) \qquad M_1(1+\delta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{(1+\delta)^n} \leqq \sum_{n=0}^{N} |a_n| = K.$$

Zu behandeln ist also noch

$$(3) \qquad M_2(1+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon n^\alpha}}{(1+\delta)^n}.$$

Um für diese Reihe eine ausreichende Abschätzung zu erhalten, bezeichnen wir ihr Maximalglied mit $m(1+\delta)$ und zerlegen gemäß

$$M_2(1+\delta) \leqq (n_0+1)\cdot m(1+\delta) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{e^{\varepsilon n^\alpha}}{(1+\delta)^n}, \tag{4}$$

wobei wir über n_0 geeignet verfügen werden.

Zur Bestimmung des Maximalgliedes $m(1+\delta)$ betrachten wir die Funktion

$$y = \frac{e^{\varepsilon x^\alpha}}{(1+\delta)^x} \quad \text{für } x \geqq 0.$$

Die Ableitung

$$y' = y\{\varepsilon\,\alpha\, x^{\alpha-1} - \log(1+\delta)\}$$

zeigt, daß die Funktion an der Stelle

$$x_1 = \left\{\frac{\varepsilon\,\alpha}{\log(1+\delta)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

ihr Maximum besitzt; links von der Stelle nimmt sie monoton zu ($y' > 0$), rechts davon nimmt sie monoton ab ($y' < 0$). Für $m(1+\delta)$ findet man damit

$$m(1+\delta) \leqq \frac{\exp\{\varepsilon x_1^\alpha\}}{(1+\delta)^{x_1}} = \exp\left\{\varepsilon(1-\alpha)\left(\frac{\varepsilon\,\alpha}{\log(1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \tag{5}$$

und an Stelle von (4) kann man, wenn nur $n_0 \geqq x_1$ angenommen wird, schreiben

$$M_2(1+\delta) \leqq (n_0+1)\exp\left\{\varepsilon(1-\alpha)\left(\frac{\varepsilon\,\alpha}{\log(1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} + \tag{6}$$
$$+ \int_{n_0}^{\infty} \exp\{\varepsilon x^\alpha - x\log(1+\delta)\}\,dx.$$

Nunmehr wählen wir n_0 mit Rücksicht auf das Integral so groß, daß für $x \geqq n_0$

$$\varepsilon x^\alpha < \tfrac{1}{2} x \log(1+\delta) \tag{7}$$

ausfällt. Dies erreichen wir, indem wir

$$n_0 = \left[\left\{\frac{2\varepsilon}{\log(1+\delta)}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] + 1$$

setzen. Beschränken wir dabei δ auf hinreichend kleine Werte, so gilt $\frac{\delta}{2} < \log(1+\delta) < \delta$, also

$$\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} < n_0 < \left(\frac{4\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1$$

und (6) erhält die Form

$$(8)\quad M_2(1+\delta) \leqq \left\{\left(\frac{4\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2\right\} \exp\left\{\varepsilon(1-\alpha)\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\log(1+\delta)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} + \\ + \int\limits_{\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}^{\infty} \exp\{-\tfrac{1}{2}x\log(1+\delta)\}\,dx.$$

Zur Auswertung des Integrals berücksichtigen wir $\log(1+\delta) > \frac{\delta}{2}$ und erhalten dann insgesamt

$$(9)\quad M_2(1+\delta) \leqq \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha+o(\delta))\right\} + \frac{4}{\delta}\exp\left\{-\frac{1}{4}(2\varepsilon)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}.$$

Setzt man (2) und (9) in (1) ein, so ergibt sich schließlich bei Beschränkung von δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_1$ die Abschätzung

$$(10)\qquad M(1+\delta) \leqq \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}.$$

2. Nach dieser Vorbereitung gehen wir nunmehr vollends zum eigentlichen Beweis des Satzes über. Wir beziehen uns dabei auf den Fall, daß die linksseitige Lückenbedingung erfüllt ist, d. h. daß für ein passendes q mit $0 < q < 1$ die Abschätzung

$$(11)\qquad |a_n| < q^{n_\nu^\alpha} \quad \text{für } n_\nu - n_\nu^\alpha \leqq n < n_\nu$$

gilt, sobald n_ν größer als ein gewisses N_1 ist. Bei Zugrundelegung der rechtsseitigen Lückenbedingung schließt man ganz analog.

Wir nehmen nun an, die Funktion $f(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär und werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes führt. Entsprechend unserer Annahme denken wir uns einen Bereich $\mathfrak{B}_0$ der in § 1 geschilderten Art gewählt, wobei wir mit Rücksicht auf spätere Abschätzungen von vornherein d so klein angenommen denken, daß

$$(12)\qquad 0 < d < \tfrac{1}{3}, \qquad q < 1 - 2d$$

ist. Zu $\mathfrak{B}_0$ wählen wir weiter entsprechend § 1, Hilfssatz 1 eine Folge von Polynomen

$$Q_0(z), Q_1(z), \ldots, Q_n(z), \ldots \quad \text{mit} \quad Q_n(z) = z^n + q_1^{(n)}z^{n-1} + \cdots + q_n^{(n)}$$

derart, daß in einem den Rand $\mathfrak{R}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$(13)\qquad |Q_n(z)| \leqq \Theta^n \qquad \text{für } n \geqq N_2$$

gilt, wo Θ eine Zahl aus $0 < \Theta < 1$ ist. Die Koeffizienten von $Q_n(z)$ lassen sich durch Integrale über eine beliebige Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ (vgl. § 1) darstellen; man hat

$$q_\varrho^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} \frac{Q_n(\zeta)}{\zeta^{n-\varrho+1}} d\zeta \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

Beschränkt man δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_2$, so liegt $\mathfrak{R}_\delta$ ganz in $\mathfrak{G}$ und für $|Q_n(\zeta)|$ ist längs $\mathfrak{R}_\delta$ die Abschätzung (13) anwendbar. Bezeichnet man noch die Länge von $\mathfrak{R}_\delta$ mit l_δ, so findet man unter Berücksichtigung von (12)

$$|q_\varrho^{(n)}| \leqq \frac{l_\delta}{2\pi} \Theta^n \frac{1}{(1-d)^n} \leqq \frac{l_\delta}{2\pi} \Theta^n \left(1 + \frac{3}{2} d\right)^n \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n).$$

Für passendes $N_3 \geqq N_2$ gilt daher die Abschätzung

(14) $$|q_\varrho^{(n)}| \leqq (1 + \tfrac{3}{2} d)^n \quad \text{für } n \geqq N_3;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n.$$

Unsere weiteren Betrachtungen knüpfen an die für jede Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ geltende Beziehung

(15) $$a_{n_\nu} + q_1^{([n_\nu^\alpha])} a_{n_\nu - 1} + \cdots + q_{[n_\nu^\alpha]}^{([n_\nu^\alpha])} a_{n_\nu - [n_\nu^\alpha]} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\delta} f(z)\, z^{n_\nu - [n_\nu^\alpha]} Q_{[n_\nu^\alpha]}(z)\, dz$$

an. Wir bezeichnen die linke Seite dieser Gleichung mit L_{n_ν}, die rechte Seite mit R_{n_ν} und werden zu dem angekündigten Widerspruch gelangen, indem wir L_{n_ν} nach unten, R_{n_ν} nach oben abschätzen.

a) Abschätzung von R_{n_ν}. Wir beschränken δ auf das Intervall $0 < \delta < \delta_2$ und wählen n_ν so groß, daß $[n_\nu^\alpha] \geqq N_2$ ausfällt. Nach (13) ergibt sich dann, wenn wir wieder mit l_δ die Länge von $\mathfrak{R}_\delta$ bezeichnen,

(16) $$|R_{n_\nu}| \leqq \frac{l_\delta}{2\pi} \cdot M(\mathfrak{R}_\delta) \cdot (1+\delta)^{n_\nu} \Theta^{[n_\nu^\alpha]},$$

wo $M(\mathfrak{R}_\delta)$ das Maximum des Betrages von $f(z)$ längs $\mathfrak{R}_\delta$ bedeutet. $|f(z)|$ läßt sich längs des auf $|z| = 1 + \delta$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ durch die beim 1. Beweisschritt betrachtete Größe $M(1+\delta)$ abschätzen, für die ihrerseits (10) gilt. Wir haben also längs des auf $|z| = 1 + \delta$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

(17) $$|f(z)| \leqq \exp\left\{\varepsilon \left(\frac{\varepsilon\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\},$$

falls wir nur δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_1$ beschränken. Dabei denken wir uns ε so klein angenommen, daß

(18) $$e^{2\varepsilon} \Theta < 1$$

t. Längs des nicht auf $|z| = 1 + \delta$ gelegenen Teils von $\Re_\delta$ ist $|f(z)|$ gewiß eschränkt, und zwar gleichmäßig für alle δ. Da die rechte Seite von (17) it $\delta \to 0$ über alle Grenzen wächst, können wir somit die Abschätzung (17) ir den ganzen Weg $\Re_\delta$ in Anspruch nehmen, falls wir wieder δ auf ein assendes Intervall $0 < \delta < \delta_3$ beschränken, also

$$M(\Re_\delta) \leqq \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\,\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \quad \text{für } 0 < \delta < \delta_3. \tag{19}$$

etzen wir somit $\delta_0 = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, so gilt für $0 < \delta < \delta_0$ nach (16) und 19) die Abschätzung

$$|R_{n_\nu}| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi} \exp\left\{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon\,\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \cdot (1+\delta)^{n_\nu} \Theta^{[n_\nu^\alpha]}. \tag{20}$$

Wählen wir nun noch speziell $\delta = \frac{\varepsilon}{n_\nu^{1-\alpha}}$, wobei wir ν so groß voraussetzen, aß dieser Wert $\delta < \delta_0$ ausfällt, so bekommen wir nach (20)

$$|R_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \leqq \left(\frac{l_{\delta_0}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \exp\left\{\varepsilon\,\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\} \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{n_\nu^{1-\alpha}}\right)^{n_\nu^{1-\alpha}} \Theta^{1-\frac{1}{n_\nu^\alpha}}.$$

araus folgt aber

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |R_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \leqq e^{\varepsilon\,\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\, e^{\varepsilon}\,\Theta < e^{2\varepsilon}\,\Theta,$$

omit nach (18)

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |R_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} < 1. \tag{21}$$

b) Abschätzung von L_{n_ν}. Um die linke Seite von (15) abzuschätzen, eachten wir, daß zunächst für das erste Glied nach Voraussetzung b)

$$\lim_{\nu\to\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} = 1 \tag{22}$$

lt. Für die restlichen Glieder finden wir dagegen nach (11) und (14) unter erücksichtigung von (12)

$$|L_{n_\nu} - a_{n_\nu}| \leqq n_\nu^\alpha q^{[n_\nu^\alpha]} (1+\tfrac{3}{2}d)^{[n_\nu^\alpha]} \leqq n_\nu^\alpha (1-2d)^{[n_\nu^\alpha]} (1+\tfrac{3}{2}d)^{[n_\nu^\alpha]} < n_\nu^\alpha (1-3d^2)^{[n_\nu^\alpha]},$$

so

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, |L_{n_\nu} - a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} \leqq 1 - 3d^2 < 1. \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |L_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu^\alpha}} = 1. \tag{24}$$

Die beiden Limesrelationen (21) und (24) sind nicht miteinander verträglich. Unsere Annahme, $f(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär, hat also in der Tat zu einem Widerspruch geführt und damit ist nach früheren Bemerkungen die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ bewiesen.

§ 3.

Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $\varphi(n)$ mit $\frac{\varphi(n)}{\log n} \to \infty$.

Der im vorigen Paragraphen für Potenzreihen mit Lücken der Größenordnung $n^\alpha (0 < \alpha < 1)$ bewiesene Satz läßt sich verallgemeinern auf Potenzreihen mit Lücken, deren Größenordnung durch eine beliebige, nur rascher als $\log n$ anwachsende Funktion $\varphi(n)$ bestimmt wird. Genau werden wir beweisen:

Satz 2. *Es sei $\varphi(x)$ eine in $x \geqq 0$ differenzierbare, positive Funktion, für die bei unbegrenzt wachsendem x*

$$\frac{\varphi(x)}{x} \to 0, \quad \frac{\varphi(x)}{\log x} \to +\infty$$

strebt, während gleichzeitig

$$\varphi'(x) \text{ monoton} \to 0$$

geht. Dann ist das in $|z| > 1$ reguläre Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$$

nicht in das Innere des Einheitskreises hinein fortsetzbar, wenn seine Koeffizienten die folgenden Bedingungen erfüllen:

a) Es ist $\overline{\lim_{n \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1.$

b) Die Folge (a_n) enthält eine ausgezeichnete Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots \quad \text{mit} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$$

derart, daß für die Gesamtheit aller a_n aus den linksseitigen Umgebungen

$$n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n < n_\nu \text{ der } a_{n_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder für die Gesamtheit aller a_n aus den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu) \text{ der } a_{n_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Limesbeziehung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

steht.

Beweis. Die Voraussetzung a) hat zur Folge, daß das Funktionsment $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat. Wir zeigen, daß $z = 1$ ein singulärer nkt von $f(z)$ ist, woraus dann unmittelbar die Nichtfortsetzbarkeit von) folgt, da sich alle Voraussetzungen nur auf die Beträge der Koeffizienten a_n ziehen. Den Beweis führen wir wie bei Satz 1 in zwei Schritten.

1. Wie damals zielt der erste Beweisschritt darauf ab, eine passende hranke für das Maximum des Betrages der zu untersuchenden Funktion ngs eines Kreises $|z| = 1 + \delta$ $(\delta > 0)$ zu gewinnen. Um jedoch eine ausichende Schranke zu erhalten, ist es im gegenwärtigen Falle notwendig, erst von $f(z)$ zu einer geeigneten Hilfsfunktion $f^*(z)$ überzugehen. Dazu nden wir auf $f(z)$ die in § 1 angegebene E-Transformation an, wobei wir r willkürlich gewähltes ϑ mit $0 < \vartheta < 1$ den Exponenten $k > \frac{1}{\vartheta}$ annommen denken. Wir wählen sodann aus der Folge der Polynome $_{\nu}^{*}\left(\frac{1}{z}\right)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ in sogleich zu beschreibender Weise eine Teilfolge $_{\nu_\varrho}^{*}\left(\frac{1}{z}\right)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ aus und bilden mit ihr die Polynomreihe

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} A_{n_{\nu_\varrho}^{*}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

e Wahl der Indizes n_{ν_ϱ} soll dabei auf jeden Fall so vorgenommen werden, ß stets

$$n_{\nu_\varrho}(1+\vartheta) < n_{\nu_{\varrho+1}}(1-\vartheta) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots)$$

, was nach § 1, Hilfssatz 3 zur Folge hat, daß die Polynome $A_{n_{\nu_\varrho}^{*}}\left(\frac{1}{z}\right)$ nicht „bereinandergreifen". Spalten wir daher in der Reihe (1) die Polynome $_{\nu_\varrho}^{*}\left(\frac{1}{z}\right)$ in ihre einzelnen Glieder auf, so ergibt sich eine Potenzreihe

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}},$$

, wieder nach § 1, Hilfssatz 3, den Konvergenzradius 1 hat. Ist überdies) in $z = 1$ regulär, so gilt dasselbe von $f^*(z)$, da in diesem Falle die Reihe (1) ch § 1, Hilfssatz 4 in einer — übrigens von der speziellen Wahl der n_{ν_ϱ} unabngigen — Umgebung von $z = 1$ normal konvergiert.

Um die endgültige Wahl der Indizes n_{ν_ϱ} zu beschreiben, betrachten wi zunächst für beliebiges $\varepsilon > 0$ die in $x \geqq 0$ erklärte Funktion

$$y = \frac{e^{\varepsilon \varphi(x)}}{(1+\delta)^x} = e^{\varepsilon \varphi(x) - x \log(1+\delta)}.$$

Wegen $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$ strebt bei festem $\delta > 0$

(4) $$y \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Ihrer Ableitung

$$y' = y\,[\varepsilon\, \varphi'(x) - \log(1+\delta)]$$

entnimmt man, da $\varphi'(x)$ positiv ist, daß es zu jedem $x > 0$ einen eindeutig bestimmten Wert $\delta = \delta_x > 0$ gibt derart, daß die Funktion y für $\delta = \delta_x$ gerade an der betreffenden Stelle x ihr Maximum besitzt. Dabei strebt

(5) $$\delta_x = e^{\varepsilon \varphi'(x)} - 1 \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

weil $\varphi'(x)$ für $x \to \infty$ monoton gegen 0 geht. Ferner gilt

(6) $$\frac{e^{\varepsilon \varphi(x)}}{(1+\delta_x)^x} = e^{\varepsilon [\varphi(x) - x \varphi'(x)]} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty,$$

denn unter unseren Voraussetzungen über $\varphi(x)$ strebt $\varphi(x) - x\,\varphi'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

Den vorstehenden Überlegungen entnehmen wir eine Abschätzung der Polynome

$$A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_n \Gamma^n_{n_\nu^*} \frac{a_n}{z^{n+1}},$$

wobei wir ν unter Bezugnahme auf Voraussetzung a) so groß wählen, daß für alle in $A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ auftretenden Koeffizienten a_n die Ungleichung

(7) $$|a_n| < e^{\varepsilon \varphi(n)}$$

gilt. Da nach Hilfssatz 3 jeweils $\sum_n \Gamma^n_{n_\nu^*} < 1$ ist, so hat man längs jedes Kreises $|z| = 1 + \delta$ $(\delta > 0)$

(8) $$\left|A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \sum_n \Gamma^n_{n_\nu^*} \frac{e^{\varepsilon \varphi(n)}}{(1+\delta)^{n+1}} < \operatorname*{Max}_{n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta)} \frac{e^{\varepsilon \varphi(n)}}{(1+\delta)^n},$$

also gewiß

(9) $$\left|A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon \varphi(n_\nu + \vartheta n_\nu)},$$

und speziell längs des Kreises $|z| = 1 + \delta_{n_\nu}$ genauer

(10) $$\left|A_{n_\nu^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_\nu)}}{(1+\delta_{n_\nu})^{n_\nu}}.$$

Nach diesen Vorbemerkungen wählen wir die Indizes $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_\varrho}, \ldots$ zessive auf Grund der folgenden Vorschrift [unter stillschweigender Beksichtigung von (2)] aus:

a) n_{ν_1} setzen wir gleich einem beliebigen Index n_ν, der nur so groß sein l, daß für die in $A_{n^*_{\nu_1}}\left(\frac{1}{z}\right)$ auftretenden Koeffizienten a_n die Ungleichung (7) t. Nach (9) und (10) gelten dann für $A_{n^*_{\nu_1}}\left(\frac{1}{z}\right)$ die Abschätzungen

$$\left|A_{n^*_{\nu_1}}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_1}},$$

$$\left|A_{n^*_{\nu_1}}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1}+\vartheta n_{\nu_1})} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta \text{ mit } \delta > 0.$$

b) n_{ν_2} wählen wir so groß, daß die beiden folgenden Bedingungen erfüllt d:

$$\alpha) \qquad e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1}+\vartheta n_{\nu_1})} < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_2})}}{(1+\delta_{n_{\nu_2}})^{n_{\nu_2}}},$$

$$\beta) \qquad \operatorname*{Max}_{n_{\nu_2}(1-\vartheta)\leqq n\leqq n_{\nu_2}(1+\vartheta)} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n)}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n}} < \frac{1}{2}\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}}.$$

e erste dieser Ungleichungen ist nach (6) erfüllbar, da links nach der Wahl n n_{ν_1} eine feste Zahl steht. Die zweite Ungleichung ist nach (4) erfüllbar, rechts eine feste Zahl steht. Auf Grund dieser Festsetzungen gelten nach bis (10) die folgenden Abschätzungen:

$$\left|A_{n^*_{\nu_2}}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{1}{2}\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_1}},$$

$$\left|A_{n^*_{\nu_2}}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_2})}}{(1+\delta_{n_{\nu_2}})^{n_{\nu_2}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_2}},$$

$$\left|A_{n^*_{\nu_2}}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_2}+\vartheta n_{\nu_2})} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta \text{ mit } \delta > 0.$$

c) n_{ν_ϱ} wählen wir nun allgemein nach vorangehender Fixierung von $n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_{\varrho-1}}$ so groß, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma}+\vartheta n_{\nu_\sigma})} < \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}},$$

$$\operatorname*{Max}_{n_{\nu_\varrho}(1-\vartheta)\leqq n\leqq n_{\nu_\varrho}(1+\vartheta)} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n)}}{(1+\delta_{n_{\nu_\sigma}})^{n}} < \frac{1}{2^{\varrho-\sigma}}\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\sigma}})^{n_{\nu_\sigma}}} \quad \text{für } \sigma = 1, 2, \ldots, \varrho-1.$$

Die Ungleichung α) ist nach (6) erfüllbar, da links eine feste Zahl steht. Di Ungleichungen β) sind nach (4) erfüllbar, da jeweils rechts eine feste Zahl steht Auf Grund dieser Festsetzungen gelten nach (8) bis (10) die folgenden Ab schätzungen:

$$\left|A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \frac{1}{2^{\varrho-\sigma}} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\sigma}})^{n_{\nu_\sigma}}} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta_{n_{\nu_\sigma}} \text{ mit } \sigma = 1, 2, \ldots, \varrho$$

$$\left|A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho}+\vartheta n_{\nu_\varrho})} \quad \text{längs } |z| = 1+\delta \text{ mit } \delta > 0.$$

Nachdem damit die Folge $n_{\nu_1}, n_{\nu_2}, \ldots, n_{\nu_\varrho}, \ldots$ und mithin auch die Hilfs funktion $f^*(z)$ vollständig festgelegt ist, haben wir nun noch die Abschätzung dieser Funktion längs der Kreise $|z| = 1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}}$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ durchzu führen. Setzen wir

$$M^*(1+\delta) = \max_{|z|=1+\delta} |f^*(z)|,$$

so liefern die für die Polynome $A_{n_{\nu_\varrho}^*}\left(\frac{1}{z}\right)$ gewonnenen Abschätzungen nach einander

$$M^*(1+\delta_{n_{\nu_1}}) \leqq \sum_{\sigma=1}^{\infty} \left|A_{n_{\nu_\sigma}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sigma-1}} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}} = 2\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_1})}}{(1+\delta_{n_{\nu_1}})^{n_{\nu_1}}},$$

und allgemein für $\varrho \geqq 2$

$$\begin{aligned} M^*(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}}) &\leqq \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} \left|A_{n_{\nu_\sigma}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| + \sum_{\sigma=\varrho}^{\infty} \left|A_{n_{\nu_\sigma}^*}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \\ &< \sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\sigma}+\vartheta n_{\nu_\sigma})} + \sum_{\sigma=\varrho}^{\infty} \frac{1}{2^{\sigma-\varrho}} \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \\ &< \frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} + 2\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}}. \end{aligned}$$

In jedem Falle hat man also

$$M^*(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}}) < 3\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

2. Nach dieser Vorbereitung verläuft nun der zweite Beweisschritt ganz ähnlich wie bei dem Satz 1 des vorigen Paragraphen. Wir nehmen an, die Funktion $f(z)$, damit auch die Funktion $f^*(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär und werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu den Voraus setzungen des Satzes führt. Dabei beziehen wir uns diesmal auf den Fall, daß

e rechtsseitige Lückenbedingung erfüllt ist, daß also für ein passendes q it $0 < q < 1$ die Ungleichung

2) $$|a_n| < q^{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \quad \text{für } n_{\nu_\varrho} < n \leqq n_{\nu_\varrho} + \varphi(n_{\nu_\varrho})$$

t, sobald n_{ν_ϱ} größer als ein gewisses N_1 ist. Bei Zugrundelegung linksseitiger icken schließt man ganz analog.

Entsprechend unserer Annahme denken wir uns zu $f^*(z)$ einen Bereich $\mathfrak{B}_0$ r in § 1 geschilderten Art gewählt, wobei wir d so klein angenommen enken, daß

3) $$0 < d < \tfrac{1}{3}, \quad q \leqq 1 - 2d$$

. Zu $\mathfrak{B}_0$ wählen wir weiter entsprechend § 1, Hilfssatz 2 eine Folge von olynomen

$$P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots,\ P_n(z),\ \ldots$$

it

$$P_n(z) = z^{m_n} + p^{(n)}_{n-m_n-1} z^{m_n+1} + \cdots + p^{(n)}_0 z^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

rart, daß in einem den Rand $\mathfrak{R}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abhätzung

4) $$|P_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für } n \geqq N_2$$

lt, wo Θ eine Zahl aus $0 < \Theta < 1$ ist. Wie beim Beweis des Satzes 1 erkennt an, daß die Koeffizienten $p^{(n)}_\varrho$ der Polynome $P_n(z)$ bei passender Wahl von $_3 \geqq N_2$ die Abschätzung

5) $$|p^{(n)}_\varrho| \leqq (1 + \tfrac{3}{2} d)^n \quad \text{für } n \geqq N_3;\ \varrho = 0, 1, \ldots, n - m_n - 1$$

lassen.

Die weiteren Betrachtungen knüpfen an die für jede Kurve $\mathfrak{R}_\vartheta$ geltende eziehung

6) $$c_{n_{\nu_\varrho}} + c_{n_{\nu_\varrho}+1} p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots + c_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}} p^{(\varphi_\varrho)}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{R}_\vartheta} f^*(z)\, z^{n_{\nu_\varrho} - m_{\varphi_\varrho}}\, P_{\varphi_\varrho}(z)\, dz$$

, wobei zur Abkürzung

$$\varphi_\varrho = [\varphi(n_{\nu_\varrho})]$$

setzt ist. Wir bezeichnen die linke Seite dieser Gleichung mit L_ϱ, die rechte t R_ϱ und werden zu dem angekündigten Widerspruch gelangen, indem wir nach unten, R_ϱ nach oben abschätzen.

a) Abschätzung von R_ϱ. Sorgen wir durch Beschränkung von δ auf ei genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_0$ dafür, daß $\mathfrak{R}_\delta$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ an gehört und wählen wir ϱ so groß, daß $\varphi_\varrho \geqq N_2$ ausfällt, so erhalten wir für R nach (14) die Abschätzung

$$|R_\varrho| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi} \cdot M^*(\mathfrak{R}_\delta) \cdot (1+\delta)^{n_{\nu_\varrho}} \Theta^{\varphi_\varrho}, \tag{17}$$

wo $M^*(\mathfrak{R}_\delta)$ das Maximum des Betrages von $f^*(z)$ längs $\mathfrak{R}_\delta$ und l_δ die Läng von $\mathfrak{R}_\delta$ bedeutet. Da bei genügend großem ϱ nach (5) gewiß $\delta_{n_{\nu_\varrho}} < \delta_0$ ist so dürfen wir in der vorstehenden Abschätzung von einem Index ϱ ab

$$\delta = \delta_{n_{\nu_\varrho}}$$

setzen. Um dafür $M^*(\mathfrak{R}_\delta)$ abzuschätzen, beachten wir, daß wir längs de auf $|z| = 1+\delta$ gelegenen Teiles von $\mathfrak{R}_\delta$ die Ungleichung (11) heranziehe können. Wir haben also längs dieses Teiles von $\mathfrak{R}_\delta$

$$|f^*(z)| < 3 \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}}. \tag{18}$$

Dabei denken wir uns $\varepsilon > 0$ so klein angenommen, daß

$$e^\varepsilon \Theta < 1 \tag{19}$$

ist. (Diese Festsetzung ist möglich, obwohl ε bei der Konstruktion von $f^*(z$ eingeht, denn $f^*(z)$ ist — wie oben hervorgehoben wurde — in einer vo der speziellen Wahl der Indexfolge n_{ν_ϱ} unabhängigen Umgebung von $z =$ regulär, so daß $\mathfrak{B}_0$ und damit Θ ebenfalls von der speziellen Wahl der n_{ν_ϱ} unab hängig angenommen werden können.) Längs des nicht auf $|z| = 1+$ gelegenen Teils von $\mathfrak{R}_\delta$ ist $|f^*(z)|$ beschränkt, und zwar gleichmäßig für alle δ Da die rechte Seite von (18) mit $\varrho \to \infty$ über alle Grenzen wächst, wie (6 zeigt, so können wir bei genügend großem ϱ die Abschätzung (18) für de ganzen Weg $\mathfrak{R}_\delta$ in Anspruch nehmen. Für große ϱ gilt somit nach (17) und (18

$$|R_\varrho| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi} \cdot 3 \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \cdot (1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}} \Theta^{\varphi_\varrho}. \tag{20}$$

Hieraus folgt

$$|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq \left(\frac{3 l_{\delta_0}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \cdot e^\varepsilon \Theta^{\frac{\varphi_\varrho}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}$$

nd damit nach (19)

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\,|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} < 1. \tag{21}$$

b) Abschätzung von L_ϱ. Geht man auf die Konstruktion von $f^*(z)$ ırück, so findet man

$$_\varrho = \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}} + \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}+1}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}+1}\, p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots + \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}\, p^{(\varphi_\varrho)}_0.$$

ir das erste Glied dieser Summe hat man nach § 1, Hilfssatz 3

$$\left|\Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}}\right| > \frac{\alpha}{\sqrt{n_{\nu_\varrho}}}\,|a_{n_{\nu_\varrho}}|.$$

a nach der Voraussetzung b) unseres Satzes $\lim_{\nu\to\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} = 1$ gilt, so lgt hieraus[7])

$$\lim_{\varrho\to\infty}\left|\Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}}\right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq \lim_{\varrho\to\infty} \alpha^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\log n_{\nu_\varrho}}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\, |a_{n_{\nu_\varrho}}|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} = 1. \tag{22}$$

ir die restlichen Summanden in dem Ausdruck für L_ϱ findet man, da nach 1, Hilfssatz 3 alle Gewichte $\Gamma < 1$ sind, auf Grund von (12) und (15), enn man noch (13) berücksichtigt,

$$\left|L_\varrho - \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}}\right| \leqq \varphi(n_{\nu_\varrho})\, q^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\,(1+\tfrac{3}{2}d)^{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \leqq \varphi(n_{\nu_\varrho})\,(1-3d^2)^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}$$

r alle genügend großen ϱ. Somit gilt

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\left|L_\varrho - \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}} a_{n_{\nu_\varrho}}\right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq 1 - 3d^2 < 1. \tag{23}$$

ıs (22) und (23) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\,|L_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq 1. \tag{24}$$

Die beiden Limesrelationen (21) und (24) sind nicht miteinander ver-ıglich. Unsere Annahme, $f(z)$ und damit $f^*(z)$ sei an der Stelle $z = 1$ regulär, t also in der Tat zu einem Widerspruch geführt und damit ist nach der merkung am Anfang des Beweises die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ gezeigt.

[7]) An dieser Stelle kommt die Voraussetzung $\frac{\varphi(x)}{\log x} \to \infty$ für $x \to \infty$ entscheidend Spiel.

Bemerkungen. 1. Hervorgehoben sei besonders der Fall, daß di Koeffizientenfolge (a_n) von $f(z)$ der Bedingung

$$|a_n| \leqq n^{K_1} \qquad \text{für genügend großes}$$

mit einem beliebigen $K_1 > 0$ genügt, während gleichzeitig für die ausgezeich nete Teilfolge (a_{n_ν}) mit einem beliebigen $K_2 > 0$

$$|a_{n_\nu}| \geqq n_\nu^{-K_2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots$$

gilt. Ist dann für eine beliebige, nur den Bedingungen des vorstehenden Satze genügende (also im wesentlichen rascher als $\log x$ anwachsende) Funktion $\varphi(x$ die Lückenbedingung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

für die Gesamtheit aller a_n aus den linksseitigen Umgebungen

$$n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n < n_\nu \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

oder für die Gesamtheit aller a_n aus den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu) \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt, so ist $f(z)$ nicht fortsetzbar[8]).

2. Der Satz 2 ist, wie sein Beweis zeigt, unmittelbar einer wesentliche Verallgemeinerung fähig: Da in die Hilfsfunktion $f^*(z)$ nur diejenigen Koeff zienten a_n eingehen, welche (für das willkürlich gewählte ϑ aus $0 < \vartheta <$ den „ϑ-Umgebungen“

$$n_\nu(1-\vartheta) \leqq n \leqq n_\nu(1+\vartheta) \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

angehören, so braucht die Voraussetzung a) nicht von der Gesamtheit all Koeffizienten a_n erfüllt zu werden. Um die Behauptung des Satzes aufrech erhalten zu können, genügt es vielmehr, an Stelle von a) vorauszusetze daß die Gesamtheit aller Koeffizienten a_n der Bedingung

$$\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$$

genügt, während speziell die Gesamtheit derjenigen a_n, welche für ein b liebiges ϑ aus $0 < \vartheta < 1$ den ϑ-Umgebungen der a_{n_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ a gehören, die schärfere Bedingung

$$\overline{\lim} |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n)}} = 1$$

erfüllt.

---

[8]) Vgl. dazu F. Lösch, a. a. O. [2]).

§ 4.

Zulassung von Ausnahmekoeffizienten in den Lücken.

Die „Lückenbedingung" b) des Satzes 2 besagt, daß die in den Umgebungen der ausgezeichneten Koeffizienten a_{n_ν} stehenden Koeffizienten klein sein sollen in dem Sinne, daß für ihre Gesamtheit

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

gelten soll. Entsprechend dem Übergang vom Hadamardschen zum Fabryschen Satze läßt sich nun der Satz 2 in der Weise verallgemeinern, daß die in den „Lücken" stehenden Koeffizienten nur im allgemeinen als klein im vorstehenden Sinne vorausgesetzt werden, daß aber eine gewisse Anzahl von Ausnahmekoeffizienten in den „Lücken" auftreten, die dieser Voraussetzung nicht genügen. Genauer zeigen wir, daß in voller Analogie zum Fabryschen Satze gilt:

Satz 3. *Die Behauptung des Satzes 2 gilt auch dann noch, wenn — unter Aufrechterhaltung der Voraussetzung a) — die Voraussetzung b) in der Weise abgeschwächt wird, daß in den linksseitigen Umgebungen*

$$n_\nu - \varphi(n_\nu) \leqq n < n_\nu \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bzw. den rechtsseitigen Umgebungen

$$n_\nu < n \leqq n_\nu + \varphi(n_\nu) \quad \text{der } a_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gewisse Ausnahmekoeffizienten zugelassen werden, welche in ihrer Gesamtheit die Bedingung

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \, |a_n|^{\frac{1}{\varphi(n_\nu)}} < 1$$

nicht erfüllen. Es muß nur die Anzahl $\psi(n_\nu)$ der in der betreffenden Umgebung von a_{n_ν} auftretenden Ausnahmekoeffizienten der Limesrelation

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\psi(n_\nu)}{\varphi(n_\nu)} = 0$$

genügen.

Beweis. Das Bestehen der Voraussetzung a) hat zur Folge, daß das Funktionselement $f(z)$ den Konvergenzradius 1 hat. Wir zeigen, daß $z = 1$ ein singulärer Punkt von $f(z)$ ist, woraus dann unmittelbar die Nichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ folgt, da sich alle Voraussetzungen nur auf die Beträge der Koeffizienten a_n beziehen. Der Beweis verläuft ganz ähnlich wie der des Satzes 2 im vorigen Paragraphen, so daß wir uns zum Teil auf kurze Andeutungen beschränken können.

1. Wir konstruieren zunächst in genau derselben Weise wie dort die Hilfsfunktion

$$f^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}} = \sum_{\varrho=1}^{\infty} A_{n^*_{\nu_\varrho}}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Wir wissen von ihr, daß sie den Konvergenzradius 1 hat und daß sie zugleich mit $f(z)$ in $z = 1$ regulär ist. Ferner gilt für das Maximum ihres Betrages längs des Kreises $|z| = 1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}}$ die Abschätzung

$$M^*(1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}}) < 3 \frac{e^{\varepsilon \varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1 + \delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

2. Nunmehr nehmen wir an, die Funktion $f(z)$, damit auch $f^*(z)$, sei an der Stelle $z = 1$ regulär und werden zeigen, daß diese Annahme auf einen Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes führt. Dabei beziehen wir uns wie im vorigen Paragraphen auf den Fall, daß die rechtsseitige Lückenbedingung erfüllt ist, daß also, *falls man nur von den Ausnahmekoeffizienten absieht*, für ein passendes q mit $0 < q < 1$ die Ungleichung

$$|a_n| < q^{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \quad \text{für} \quad n_{\nu_\varrho} < n \leqq n_{\nu_\varrho} + \varphi(n_{\nu_\varrho}) \tag{3}$$

gilt, sobald n_{ν_ϱ} größer als ein gewisses N_1 ist. Die in der Umgebung von $a_{n_{\nu_\varrho}}$ auftretenden Ausnahmekoeffizienten, für die (3) nicht zu gelten braucht, bezeichnen wir mit

$$a_{n_{\nu_\varrho}+\sigma_1},\ a_{n_{\nu_\varrho}+\sigma_2},\ \ldots,\ a_{n_{\nu_\varrho}+\sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}}$$

wobei natürlich $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ von ϱ abhängen.

Entsprechend unserer Annahme denken wir uns wie in § 3 zu $f^*(z)$ einen Bereich $\mathfrak{B}_0$ gewählt, der zu so kleinem d gehört, daß die Ungleichungen

$$0 < d < \tfrac{1}{3}, \quad q < 1 - 2d \tag{4}$$

erfüllt sind. Ferner wählen wir wieder eine Folge von Polynomen

$$P_0(z),\ P_1(z),\ \ldots,\ P_n(z),\ \ldots$$

mit

$$P_n(z) = z^{m_n} + p^{(n)}_{n-m_n-1} z^{m_n+1} + \cdots + p^{(n)}_0 z^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

derart, daß in einem den Rand $\mathfrak{R}_0$ von $\mathfrak{B}_0$ enthaltenden Gebiet $\mathfrak{G}$ die Abschätzung

$$|P_n(z)| \leqq \Theta^n \quad \text{für} \quad n \geqq N_2 \tag{5}$$

gilt, wo $0 < \Theta < 1$ ist; für die Koeffizienten $p^{(n)}_\varrho$ der Polynome $P_n(z)$ gilt bei passender Wahl von $N_3 \geqq N_2$

$$|p^{(n)}_\varrho| \leqq (1 + \tfrac{3}{2} d)^n \quad \text{für} \quad n \geqq N_3;\ \ \varrho = 0, 1, \ldots, n - m_n - 1. \tag{6}$$

3. Weiterhin liegt es nahe, auch jetzt wieder an die für jede Kurve $\mathfrak{R}_\delta$ geltende Beziehung

$$(7)\quad c_{n_{\nu_\varrho}} + c_{n_{\nu_\varrho}+1}\, p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots + c_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}} p_0^{(\varphi_\varrho)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}_\delta} f^*(z)\, z^{n_{\nu_\varrho} - m_{\varphi_\varrho}}\, P_{\varphi_\varrho}(z)\, dz$$

anzuknüpfen, wobei zur Abkürzung wie früher

$$\varphi_\varrho = [\varphi(n_{\nu_\varrho})]$$

gesetzt ist. Diese Beziehung eignet sich jedoch im gegenwärtigen Falle nicht unmittelbar für die weiteren Betrachtungen, da sich bei Anwendung derselben Schlußweise wie in § 3 bei der Abschätzung der linken Seite die Ausnahmekoeffizienten störend bemerkbar machen. Wir leiten deshalb statt ihrer eine neue Beziehung ähnlicher Art ab, bei der die Ausnahmekoeffizienten ausgeschaltet sind.

Dazu bilden wir zunächst im Anschluß an E. Fabry[9]) für beliebiges ϱ die Hilfsfunktion

$$F_\varrho(z) = \sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)} z^\mu = \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left(z\, e^{-\frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} - e^{\frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} \right),$$

wobei zur Abkürzung

$$\Phi_\varrho = \varphi(n_{\nu_\varrho}) \cdot \overset{\varphi(n_{\nu_\varrho})}{\overset{\cdot}{\cdot}}_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$$

gesetzt ist. Führen wir hier $z = e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}$ mit beliebigem σ ein, so erhalten wir

$$(8)\quad F_\varrho\left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) = \sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)} e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\mu\pi i}$$

$$= \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i - \frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} - e^{\frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi i}{2}} \right) = (2i)^{\psi(n_{\nu_\varrho})} e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\psi(n_{\nu_\varrho})\frac{\pi i}{2}} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \sin\frac{\sigma-\sigma_\tau}{\Phi_\varrho}\frac{\pi}{2}.$$

Man erkennt, daß dieser Ausdruck so gebildet ist, daß er für $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ verschwindet. Weiterhin benötigen wir noch einige Abschätzungen desselben. Zunächst entnimmt man (8) unmittelbar für beliebiges σ

$$(9)\quad \left| F_\varrho\left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) \right| \leqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}.$$

---

[9]) E. Fabry, Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers. Acta Math. **22** (1899), S. 65—87.

Diese Abschätzung gilt auch für die Koeffizienten $C_\mu^{(\varrho)}$. Nach der Cauchyschen Koeffizientenformel hat man nämlich

$$C_\mu^{(\varrho)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{F_\varrho(z)}{z^{\mu+1}}\, dz,$$

und da nach (9) längs des Einheitskreises $|F_\varrho(z)| \leqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ gilt, so folgt sofort

$$|C_\mu^{(\varrho)}| \leqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho})). \tag{10}$$

Ferner erhalten wir speziell für $\sigma = 0$

$$|F_\varrho(1)| = 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \sin \frac{\sigma_\tau}{\Phi_\varrho} \frac{\pi}{2} \geqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \sin \frac{\tau}{\Phi_\varrho} \frac{\pi}{2}$$

und wegen $\sin \frac{\pi}{2} x \geqq x$ für $0 \leqq x \leqq 1$ weiter

$$|F_\varrho(1)| \geqq 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \prod_{\tau=1}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \frac{\tau}{\Phi_\varrho} = 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \frac{\psi(n_{\nu_\varrho})!}{\Phi_\varrho^{\psi(n_{\nu_\varrho})}} = 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left[\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi^2(n_{\nu_\varrho})}\right]^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \psi(n_{\nu_\varrho})!\,.$$

Unter Verwendung der Abschätzung $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{en}$ folgt hieraus endlich

$$|F_\varrho(1)| > \left(\frac{2}{e}\right)^{\psi(n_{\nu_\varrho})} \left[\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\right]^{2\psi(n_{\nu_\varrho})} \sqrt{e\,\psi(n_{\nu_\varrho})}\,.$$

Durchläuft man die Indexfolge n_{ν_ϱ} ($\varrho = 1, 2, \ldots$), so liefert die vorstehende Ungleichung

$$\varlimsup_{\varrho\to\infty} |F_\varrho(1)|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq \lim_{\varrho\to\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} e^{2\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \log \frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \sqrt{e\,\psi(n_{\nu_\varrho})}^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} = 1,$$

oder unter Berücksichtigung von (9)

$$\varlimsup_{\varrho\to\infty} |F_\varrho(1)|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} = 1. \tag{11}$$

Um nun zu der angekündigten Beziehung zu gelangen, die an die Stelle von (7) treten soll, bilden wir unter Verwendung der eben eingeführten Hilfsfunktion aus den Polynomen $P_n(z)$ die Ausdrücke

$$C_\mu^{(\varrho)} e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i} P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\frac{\mu}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)$$

$$= C_\mu^{(\varrho)} \left\{ z^{m_{\varphi_\varrho}} + e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} p_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1}^{(\varphi_\varrho)} z^{m_{\varphi_\varrho}+1} + \cdots + e^{\mu\frac{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i} p_0^{(\varphi_\varrho)} z^{\varphi_\varrho} \right\}$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho})).$$

Die Addition dieser sämtlichen Gleichungen liefert

$$\sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)} e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i} P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)$$

$$= F_\varrho(1)\, z^{m_{\varphi_\varrho}} + F_\varrho\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} z^{m_{\varphi_\varrho}+1} + \cdots + F_\varrho\left(e^{\frac{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p_0^{(\varphi_\varrho)} z^{\varphi_\varrho}.$$

Indem wir das vorstehende Polynom an Stelle von $P_{\varphi_\varrho}(z)$ verwenden, können wir (7) durch die folgende, ebenfalls für jede Kurve $\mathfrak{R}_\vartheta$ geltende Beziehung ersetzen:

$$c_{n_{\nu_\varrho}} F_\varrho(1) + c_{n_{\nu_\varrho}+1} F_\varrho\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots + c_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}} F_\varrho\left(e^{\frac{\varphi_\varrho - m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) p_0^{(\varphi_\varrho)}$$

(12)

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{R}_\vartheta} f^*(z)\, z^{n_{\nu_\varrho} - m_{\varphi_\varrho}} \left\{\sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)} e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i} P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)\right\} dz.$$

An diese Gleichung, in deren linker Seite wegen $F\left(e^{\frac{\sigma}{\Phi_\varrho}\pi i}\right) = 0$ für $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\psi(n_{\nu_\varrho})}$ die Ausnahmekoeffizienten ausgeschaltet sind, knüpfen die weiteren Betrachtungen an. Wir bezeichnen ihre linke Seite mit L_ϱ, ihre rechte Seite mit R_ϱ. Indem wir nun wieder genau wie beim Beweis des Satzes 2 vorgehen, schätzen wir L_ϱ nach unten, R_ϱ nach oben ab und gelangen damit zu dem angekündigten Widerspruch.

a) Abschätzung von R_ϱ. Wir sorgen durch Beschränkung von δ auf ein genügend kleines Intervall $0 < \delta < \delta_0$ dafür, daß $\mathfrak{R}_\vartheta$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört. Dann können wir zunächst die Hilfspolynome $P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z\right)$ längs $\mathfrak{R}_\vartheta$ abschätzen. Durchläuft nämlich z den Weg $\mathfrak{R}_\vartheta$, so beschreibt $e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i} z$ den Weg, der entsteht, wenn $\mathfrak{R}_\vartheta$ durch den Winkel $\frac{1}{\Phi_\varrho}\mu\pi$ um den Nullpunkt gedreht wird. Da nun der Weg $\mathfrak{R}_\vartheta$ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehört und ferner für $\varrho \to \infty$ der Betrag des Drehwinkels

$$\frac{1}{\Phi_\varrho}\mu\pi \leqq \frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\Phi_\varrho}\pi = \left(\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\right)^2 \pi \to 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho}))$$

strebt, so gehört auch der gedrehte Weg für großes ϱ dem Gebiet $\mathfrak{G}$ an. Wir dürfen also zur Abschätzung unserer Hilfspolynome (5) heranziehen und erhalten damit für große ϱ längs des Integrationsweges $\mathfrak{R}_\vartheta$

$$\left|P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\mu\pi i} z\right)\right| \leqq \Theta^{\varphi_\varrho} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \psi(n_{\nu_\varrho})).$$

Berücksichtigen wir noch (10), so folgt hieraus für große ϱ

$$(13)\qquad \max_{z\,\varepsilon\,\mathfrak{R}_\delta}\left|\sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} C_\mu^{(\varrho)}\, e^{-\frac{m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\mu\pi i}\, P_{\varphi_\varrho}\left(e^{\mu\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\, z\right)\right|$$
$$\leqq \sum_{\mu=0}^{\psi(n_{\nu_\varrho})} |C_\mu^{(\varrho)}|\,\Theta^{\varphi_\varrho} \leqq \{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\,\Theta^{\varphi_\varrho}.$$

Nunmehr verläuft die Abschätzung vollends genau wie beim Beweis des Satzes 2. Wählen wir nur ϱ hinreichend groß, so erhalten wir zunächst nach (13)

$$(14)\qquad |R_\varrho| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi}\cdot M^*(\mathfrak{R}_\delta)\cdot(1+\delta)^{n_{\nu_\varrho}}\cdot\{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\,\Theta^{\varphi_\varrho},$$

wo $M^*(\mathfrak{R}_\delta)$ das Maximum von $f^*(z)$ längs $\mathfrak{R}_\delta$ und l_δ die Länge von $\mathfrak{R}_\delta$ bedeutet. Dabei dürfen wir wie früher $\delta = \delta_{n_{\nu_\varrho}}$ wählen und erhalten für $M^*(\mathfrak{R}_\delta)$ anschließend an (2) die Abschätzung

$$(15)\qquad M^*(\mathfrak{R}_\delta) \leqq M^*(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}}) < 3\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}},$$

wobei wir wieder ε so klein angenommen denken, daß

$$(16)\qquad e^{\varepsilon}\Theta < 1$$

gilt. Aus (14) und (15) erhält man die für große ϱ geltende Beziehung

$$|R_\varrho| \leqq \frac{l_{\delta_0}}{2\pi}\cdot 3\,\frac{e^{\varepsilon\varphi(n_{\nu_\varrho})}}{(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}}\cdot(1+\delta_{n_{\nu_\varrho}})^{n_{\nu_\varrho}}\cdot\{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\,\Theta^{\varphi_\varrho},$$

aus der weiter

$$|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq \left(\frac{3\,l_{\delta_0}}{2\pi}\{\psi(n_{\nu_\varrho})+1\}\,2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}\right)^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}\cdot e^{\varepsilon}\,\Theta^{\frac{\varphi_\varrho}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}}$$

folgt. Hieraus entnimmt man unter Berücksichtigung der Voraussetzung $\frac{\psi(n_{\nu_\varrho})}{\varphi(n_{\nu_\varrho})} \to 0$ schließlich nach (16)

$$(17)\qquad \overline{\lim_{\varrho\to\infty}}\,|R_\varrho|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} < 1.$$

b) Abschätzung von L_ϱ. Geht man auf die Konstruktion von $f^*(z)$ zurück, so findet man

$$L_\varrho = F_\varrho(1)\,\Gamma^*_{n_{\nu_\varrho}^{\nu_\varrho}}\,a_{n_{\nu_\varrho}} + F_\varrho\left(e^{\frac{1}{\Phi_\varrho}\pi i}\right)\Gamma^*_{n_{\nu_\varrho}^{\nu_\varrho}}\,a_{n_{\nu_\varrho}+1}\,p^{(\varphi_\varrho)}_{\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}-1} + \cdots +$$
$$+ F_\varrho\left(e^{\frac{\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}{\Phi_\varrho}\pi i}\right)\Gamma^*_{n_{\nu_\varrho}^{\nu_\varrho}}\,a_{n_{\nu_\varrho}+\varphi_\varrho-m_{\varphi_\varrho}}\,p_0^{(\varphi_\varrho)}.$$

a dieser Ausdruck nach der Konstruktion von $F_\varrho(z)$ keine Ausnahmekoeffi-
enten a_n enthält, sondern nur solche, die die Lückenbedingung (3) erfüllen,
› kann man ähnlich schließen wie beim Beweis des Satzes 2. Berücksichtigt
an (11), so erhält man zunächst wie dort für das erste Glied

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \left| F_\varrho(1)\, \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}}\, a_{n_{\nu_\varrho}} \right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq 1. \tag{18}$$

nter Berücksichtigung von (9) erhält man ferner in derselben Weise wie
amals

$$\left| L_\varrho - F_\varrho(1)\, \Gamma^{n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}}\, a_{n_{\nu_\varrho}} \right| \leqq \varphi(n_{\nu_\varrho})\,(1-3d^2)^{\varphi(n_{\nu_\varrho})}\, 2^{\psi(n_{\nu_\varrho})}$$

nd damit

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \left| L_\varrho - F_\varrho(1)\, \Gamma^{*\,n_{\nu_\varrho}}_{n_{\nu_\varrho}}\, a_{n_{\nu_\varrho}} \right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \leqq 1 - 3d^2 < 1. \tag{19}$$

us (18) und (19) folgt schließlich

$$\overline{\lim_{\varrho\to\infty}} \left| L_\varrho \right|^{\frac{1}{\varphi(n_{\nu_\varrho})}} \geqq 1. \tag{20}$$

Die beiden Limesrelationen (17) und (20) sind nicht miteinander ver-
äglich. Unsere Annahme, $f(z)$ und damit $f^*(z)$ sei an der Stelle $z = 1$
gulär, hat also in der Tat zu einem Widerspruch geführt und damit ist die
ichtfortsetzbarkeit von $f(z)$ bewiesen.

Bemerkung. Es sei noch bemerkt, daß der vorstehende Satz 3 der-
lben Verallgemeinerung fähig ist wie der Satz 2: Da in die Hilfsfunktion $f^*(z)$
ur diejenigen Koeffizienten a_n eingehen, welche (für das willkürlich gewählte ϑ
us $0 < \vartheta < 1$) den ϑ-Umgebungen der a_{n_ν} angehören, so genügt es, die
oraussetzung a) für die Gesamtheit dieser Koeffizienten zu machen, während
ie Gesamtheit aller übrigen Koeffizienten nur der Bedingung

$$\overline{\lim} \left| a_n \right|^{\frac{1}{n}} = 1$$

enügen muß.

(Eingegangen am 8. November 1942.)

Über die absolute Konvergenz von Polynomreihen.

Von

Stephan Lipka in Szeged (Ungarn).

1. Es seien $P_n(z)$ Polynome mit lauter reellen Koeffizienten. Wir werden die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z) \tag{1}$$

untersuchen. Weiß man, daß die Reihe in einem Punkte absolut konvergiert, so kann man hieraus auf die absolute Konvergenz in anderen Punkten schließen. Von E. Hille stammt z. B. der Satz[1]): Haben die Polynome $P_n(z)$ lauter reelle, nichtnegative Nullstellen und konvergiert die Reihe (1) im Punkte z_0, der nicht auf der reellen Achse liegt, absolut, so konvergiert sie absolut im Kreisabschnitt $|z| \leqq |z_0|$, $R(z) \geqq R(z_0)$. Es gilt die folgende, leicht beweisbare Verallgemeinerung dieses Satzes:

Satz 1. *Es seien die Nullstellen der $P_n(z)$ alle reell. Liegen die Nullstellen der $P_n(z)$ alle in einem Intervall $\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2$, und konvergiert die Reihe* (1) *im Punkte z_0, $J(z_0) > 0$, absolut, so konvergiert sie absolut im Kreiszweieck*

$$|z - \xi_1| \leqq |z_0 - \xi_1|, \quad |z - \xi_2| \leqq |z_0 - \xi_2|. \tag{2}$$

Beweis. Die Punkte z_0, $\bar{z}_0$ bestimmen ein Kreisbüschel, dessen Zentrale die reelle Achse ist. Das Kreiszweieck (2) enthalten die Kreise des Büschels, deren Mittelpunkte im Intervall (ξ_1, ξ_2) liegen. Ist nun a eine Nullstelle von $P_n(z)$, so fällt sie nach Voraussetzung in das Intervall (ξ_1, ξ_2), also folgt nach voriger Bemerkung, daß der Kreis $|z - a| \leqq |z_0 - a|$ das Kreiszweieck (2) enthält. Ist also z ein Punkt des Kreiszweiecks (2), so gilt

$$|z - a| \leqq |z_0 - a|,$$

und durch diese Abschätzung der das Polynom $P_n(z)$ zusammensetzenden Linearfaktoren gewinnt man endlich die Ungleichung

$$|P_n(z)| \leqq |P_n(z_0)|$$

für die Punkte z von (2). Damit ist aber Satz 1 bewiesen.

Setzt man im Satz 1 $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \infty$, so gewinnt man den erwähnten Satz von E. Hille. Jetzt tritt die Halbebene $R(z) \geqq R(z_0)$ an Stelle des Kreises $|z - \xi_2| \leqq |z_0 - \xi_2|$.

[1]) E. Hille, On the absolute convergence of polynomial series. American Math. Monthly **45** (1938), S. 220—226.

2. Wendet man den Satz 1 für $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = \xi > 0$ an, so gewinnt an den

Satz 2. *Die Nullstellen von $P_n(z)$ seien alle reell. Gibt es eine obere Schranke ξ (> 0) für sämtliche Nullstellen von $P_n(z)$ und konvergiert die Reihe* (1) *für ein z_0, das nicht auf der reellen Achse liegt, absolut, so konvergiert sie absolut im Kreisabschnitt*

$$|z - \xi| \leqq |z_0 - \xi|, \quad R(z) \leqq R(z_0). \tag{}$$

Eine Erweiterung des Satzes 2 ist der

Satz 3. *Es sei ξ eine positive obere Schranke für die reellen Nullstellen von $P_n(z)$. Die komplexen nichtreellen Nullstellen von $P_n(z)$ sollen alle in dem Streifen*

$$R(z) \leqq -\delta, \quad -\eta \leqq J(z) \leqq \eta \qquad (\delta > 0,\ \eta > 0) \tag{}$$

liegen. Konvergiert die Reihe (1) *absolut in einem Punkte*

$$z_0 = x_0 + i y_0, \quad x_0 > 0, \quad y_0 > 0,$$

liegt ferner der Kreisabschnitt (3) *in der Halbebene $R(z) \geqq 0$, d. h. ist*

$$\xi \geqq |z_0 - \xi| \tag{1}$$

und gilt noch

$$\delta \geqq \eta, \tag{2}$$

$$\xi \geqq x_0, \tag{3}$$

konvergiert die Reihe (1) *absolut im Kreisabschnitt* (3).

Beweis. Es sei $\alpha \pm i\beta$ ein konjugiert-komplexes Wurzelpaar von $P_n(z)$. Wir betrachten den Faktor zweiten Grades

$$[z - (\alpha + i\beta)]\,[z - (\alpha - i\beta)] = \psi(z)$$

von $P_n(z)$. Da nach Voraussetzung (4) $\alpha < 0$ ist, so folgt aus der Formel

$$|\psi(x + iy)|^2 = \{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\}\{(x-\alpha)^2 + (y+\beta)^2\}$$

die Ungleichung

$$|\psi(x_0 + iy)| \geqq |\psi(x + iy)| \tag{}$$

für $0 \leqq x \leqq x_0$. Da $\alpha < 0$, ferner nach (4_2) und (4) $|\alpha| \geqq \beta$ ist, so fällt sich der Koeffizient von y^2 in dem Polynom

$$|\psi(x_0 + iy)|^2 = y^4 + 2y^2\{(x_0-\alpha)^2 - \beta^2\} + \{\beta^2 + (x_0-\alpha)^2\}^2$$

positiv aus. Der Wert des Polynoms wächst also mit y, und darum gilt die Ungleichung

$$|\psi(x_0 + iy_0)| \geqq |\psi(x_0 + iy)| \tag{}$$

für $|y| \leqq y_0$. Liegt nun $z = x + iy$ im Kreisabschnitt (3), so genügt es nach (4_1) und (4_3) der Bedingungen $0 \leqq x \leqq x_0$, $|y| \leqq y_0$, d. h. der Bedingungen von (5) und (6). Infolgedessen bestehen die Ungleichungen (5) und (6) und hieraus folgt:

$$|\psi(z_0)| \geqq |\psi(z)| \tag{7}$$

für die Punkte $z = x + iy$ von (3).

Ist $(z - a)$ ein linearer Faktor von $P_n(z)$, so folgt, wie beim Beweis des Satzes (1), daß für die Punkte z von (3) die Ungleichung $|z - a| \leqq |z_0 - a|$ gilt. Hieraus folgt endlich nach (7) für die Punkte z von (3) die Abschätzung

$$|P_n(z_0)| \geqq |P_n(z)|,$$

und damit ist Satz 3 bewiesen.

3. Die Nullstellen von $P_n(z)$ seien alle reell. Es bedeute $N(P_n, a, b)$ die Anzahl der Nullstellen von $P_n(z)$ im Intervall (a, b) und $N(P, a, b)$ bedeute eine obere Grenze der Zahlen $N(P_n, a, b)$. E. Hille hat unter anderem den Satz bewiesen [2]): Es sei $N(P, a, b) < \infty$ für jedes endliche Intervall (a, b) und sei $N(P, -\infty, 0) = 0$. Konvergiert die Reihe (1) für ein z_0, das nicht auf der positiven reellen Achse liegt, absolut, so konvergiert sie absolut in der Halbebene $R(z) > R(z_0)$.

Wir beweisen eine Verallgemeinerung des Hilleschen Satzes für reelle Polynome $P_n(z)$, die nicht lauter reelle Nullstellen haben. Es bedeute $N(P_n, a$ die Anzahl der Nullstellen von $P_n(z)$, die in der Halbebene $R(z) \leqq a$ liegen ferner sei $N(P, a)$ die obere Grenze der Zahlen $N(P_n, a)$, d. h. $N(P_n, a \leqq N(P, a)$. Dann gilt der

Satz 4. *Es sei $N(P, a) < \infty$ für jedes endliche a. Konvergiert die Reihe* (1) *im Punkte $z_0 = x_0 + iy_0$, $y_0 > 0$, absolut, sind ferner die Polynome $P_n(z)$ in einer festen Umgebung $|z - z_0| \leqq \varrho$ von z_0 alle von Null verschieden so konvergiert die Reihe* (1) *absolut in der Halbebene $R(z) > x_0$.*

Beweis. Es bezeichne ω eine später passend zu wählende positive Schranke. Wir zerlegen das Polynom $P_n(z)$ in zwei Faktoren

$$P_n(z) = P_{n1}(z) P_{n2}(z),$$

wobei die Nullstellen von $P_{n1}(z) = \prod_{(j)} (z - \zeta_j)$ der Bedingung $R(\zeta_j) \leqq$ genügen. [Ist das Produkt $P_{n1}(z)$ leer, so sei $P_{n1}(z) \equiv 1$.] $P_{n2}(z)$ enthält die übrigen Faktoren von $P_n(z)$. Der Grad von $P_{n1}(z)$ ist $\leqq N(P, \omega)$. E

[2]) Siehe Fußnote [1]), Theorem 5.

ei $z_1 = x_1 + iy_1$ eine Stelle, für welche $x_1 > x_0$ gilt. Wir werden den Wert es Quotienten

$$\left|\frac{P_n(z_1)}{P_n(z_0)}\right| = \left|\frac{P_{n1}(z_1)}{P_{n1}(z_0)}\right| \left|\frac{P_{n2}(z_1)}{P_{n2}(z_0)}\right|$$

oschätzen. Der Quotient ist aus Faktoren der Form

$$\frac{z_1 - \zeta}{z_0 - \zeta}$$

usammengesetzt. Die Anzahl der Faktoren $\frac{z_1 - \zeta_j}{z_0 - \zeta_j}$ von $\left|\frac{P_{n1}(z_1)}{P_{n1}(z_0)}\right|$ ist höchstens leich: $N(P, \omega) = N$. Da nach Voraussetzung die $P_n(z)$ in der Umgebung $z - z_0| \leqq \varrho$ von z_0 alle von Null verschieden sind, so folgt die Ungleichung

$$\left|\frac{z_1 - \zeta_j}{z_0 - \zeta_j}\right| = \left|1 + \frac{z_1 - z_0}{z_0 - \zeta_j}\right| < 1 + \frac{|z_1 - z_0|}{\varrho},$$

nd hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\frac{P_{n1}(z_1)}{P_{n1}(z_0)}\right| < \left(1 + \frac{|z_1 - z_0|}{\varrho}\right)^N = M^N \tag{8}$$

vobei M bloß von z_1 abhängt).

Es sei nun $\zeta = \xi + i\eta$, $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ ein konjugiert-komplexes Null-ellenpaar von $P_n(z)$; dann betrachten wir den Faktor

$$\frac{|z_1 - \zeta|\,|z_1 - \bar{\zeta}|}{|z_0 - \zeta|\,|z_0 - \bar{\zeta}|} \tag{9}$$

es Quotienten $\left|\frac{P_{n2}(z_1)}{P_{n2}(z_0)}\right|$. Man kann beweisen, daß der Wert von (9) < 1 ist, enn die positive Schranke ω passend gewählt wird. Nach den Formeln

$$|z_0 - \zeta|^2\,|z_0 - \bar{\zeta}|^2 = \{(\xi - x_0)^2 + y_0^2 + \eta^2\}^2 - 4\,y_0^2\eta^2,$$
$$|z_1 - \zeta|^2\,|z_1 - \bar{\zeta}|^2 = \{(\xi - x_1)^2 + y_1^2 + \eta^2\}^2 - 4\,y_1^2\eta^2$$

lt nämlich die Ungleichung

$$|z_0 - \zeta|\,|z_0 - \bar{\zeta}| > |z_1 - \zeta|\,|z_1 - \bar{\zeta}|, \tag{9'}$$

enn

$$\{(\xi - x_0)^2 + y_0^2 + \eta^2\}^2 - \{(\xi - x_1)^2 + y_1^2 + \eta^2\}^2 > 4\,\eta^2\,(y_0^2 - y_1^2),$$

. h. wenn

$$(\xi - x_0)^2 + (\xi - x_1)^2 + y_0^2 + y_1^2 + 2\,\eta^2\}\{2\,(\xi - x_1)\,(x_1 - x_0) + \\ + (x_1 - x_0)^2 + y_0^2 - y_1^2\} > 4\,\eta^2\,(y_0^2 - y_1^2)$$

besteht. Man sieht aber unmittelbar, daß die letztere Ungleichung sicher erfüllt ist, wenn $R(\zeta) = \xi$ der Bedingung

$$\xi > x_1 + \frac{|y_0^3 - y_1^3|}{2(x_1 - x_0)}$$

genügt. Setzt man also

$$\omega = x_1 + \frac{|y_0^3 - y_1^2|}{2(x_1 - x_0)},$$

so ist die Ungleichung (9′) für $R(\zeta) > \omega$ erfüllt und der Wert von (9) wird kleiner als 1.

Für eine reelle Nullstelle ξ von $P_{n\,2}(z)$ gilt ähnlich eine Ungleichung

$$\left|\frac{z_1 - \xi}{z_0 - \xi}\right| < 1$$

für $\xi > \omega$. Dies folgt einfach nach vorigen Betrachtungen, wenn man dort $\eta = 0$ setzt. Der Quotient $\left|\frac{P_{n\,2}(z_1)}{P_{n\,2}(z_0)}\right|$ hat also lauter Faktoren, die < 1 sind und deshalb gilt

$$\left|\frac{P_{n\,2}(z_1)}{P_{n\,2}(z_0)}\right| < 1.$$

Hieraus folgt endlich nach (8) die Abschätzung

$$\left|\frac{P_n(z_1)}{P_n(z_0)}\right| < M^N,$$

d. h.

$$|P_n(z_1)| < M^N |P_n(z_0)|,$$

und damit ist Satz 4 bewiesen.

(Eingegangen am 16. November 1942.)

Über nicht meßbare Punktmengen und nicht meßbare Funktionen.

Von

Othmar Zaubek, Schrems (Nd).

Die durch G. Cantor, Peano, Jordan, Borel und anderen begründete moderne Theorie des Inhaltes wurde insbesondere von H. Lebesgue ausgebaut. Sie erhielt durch die Theorie der Maßfunktionen und der Meßbarkeit von C. Carathéodory einen gewissen Abschluß. Die hier folgenden Untersuchungen gelten einer feineren Theorie der nicht meßbaren Punktmengen und Funktionen[1]).

Wir knüpfen unsere Überlegungen an die Theorie der Meßbarkeit an. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und $M(X)$ eine Maßfunktion, deren Definitionsbereich die Menge aller Teilmengen von R ist, wofür wir kürzer sagen wollen $M(X)$ ist in R definiert, dann heißt in bekannter Weise die Punktmenge $A \subset R$ meßbar für die Maßfunktion $M(X)$, wenn für jede Punktmenge Y endlichen äußeren Maßes die Gleichung

$$M(Y) = M(AY) + M(Y - AY)$$

besteht. Die Eigenschaft einer Punktmenge, meßbar zu sein, hängt von der zugrunde gelegten Maßfunktion ab und es ist bekannt, daß es Maßfunktionen gibt, für die jede Punktmenge des Definitionsbereiches meßbar ist. Auf derher gehörende Einzelheiten gehen wir später noch näher ein.

Ist R ein metrischer Raum und $M(X)$ eine in ihm definierte Maßfunktion, für die es nicht meßbare Punktmengen gibt, und A eine meßbare, B eine zu A fremde nicht meßbare Punktmenge, dann ist die Summe $C = A + B$ eine nicht meßbare Punktmenge, die sich in zwei Teile spalten läßt, von denen der eine meßbar, der andere nicht meßbar ist. Diese Tatsache legt die Frage nahe, auf welche Art sich eine nicht meßbare Punktmenge in zwei Teile spalten läßt, wobei der eine meßbar, der andere nicht meßbar ist. Diese Frage führt also auf die Struktur der nicht meßbaren Punktmengen, die hier in einfacher Weise untersucht werden soll.

[1]) Es ist möglich, daß die Gedanken, die der folgenden Theorie zugrunde liegen, oder auch ähnliche, bereits von anderen Autoren entwickelt wurden und ihr Niederschlag veröffentlicht wurde. Eine Entscheidung darüber ist mir zur Zeit nicht möglich, da ich die hierher gehörenden Veröffentlichungen nicht überblicke.

Bevor wir mit den eigentlichen Entwicklungen beginnen, verallgemeinern wir den Begriff der Maßfunktion in einfacher Weise. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und ein Mengensystem $\mathfrak{m}$ gegeben, dessen Mengen Punktmengen des Raumes R sind, so wollen wir eine Mengenfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{m}$ eine Maßfunktion nennen, wenn die die Maßfunktionen charakterisierenden Eigenschaften, bezogen auf das Mengensystem $\mathfrak{m}$, für diese Mengenfunktion gelten. Die präzise Formulierung der auf ein Mengensystem bezogenen Eigenschaften liegt auf der Hand. Diese Verallgemeinerung ist auch vom Standpunkt der elementaren Flächenrechnung gerechtfertigt, denn in der elementaren Theorie des Flächeninhaltes wird der Flächeninhalt zunächst nur für Streckenfiguren, das sind geschränkte Punktmengen, deren vollständige Begrenzung nur aus endlich vielen Strecken besteht und die einen Punkt enthalten, der nicht zur Begrenzung gehört, erklärt. Der Definitionsbereich dieser Maßfunktion wird dann schließlich in der modernen Theorie des Flächeninhaltes auf das System aller Teilmengen der Ebene ausgedehnt, wenn man den Flächeninhalt als den äußeren Inhalt interpretiert.

Diese also zunächst nur für die Streckenfiguren definierte Maßfunktion besitzt die Eigenschaft, daß ihr Definitionsbereich erweitert werden kann. Um diese Bildungen zu präzisieren, geben wir folgende Definitionen:

Definition 1. Eine Maßfunktion heißt vollständig, wenn sie in einem die Punktmengen des Definitionsbereiches enthaltenden Raume definiert ist.

Definition 2. Eine Maßfunktion mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{m}$ heißt erweiterungsfähig, wenn es eine Maßfunktion mit einem $\mathfrak{m}$ echt umfassenden Definitionsbereich gibt, deren Funktionswerte in $\mathfrak{m}$ mit denen der gegebenen übereinstimmen.

Definition 3. Eine nicht erweiterungsfähige Maßfunktion heißt starr.

Aus der Definition 1 ergibt sich unmittelbar, daß eine Maßfunktion nur dann vollständig sein kann, wenn ihr Definitionsbereich jede Teilmenge der Vereinigungsmenge aller Mengen des Definitionsbereiches enthält. Ist eine Maßfunktion vollständig, so braucht sie keineswegs starr zu sein. So läßt sich die Maßfunktion „Länge“ einer geraden (linearen) Punktmenge deren Definitionsbereich die Punktmenge Gerade ist, auf das System aller streckbaren Kurven erweitern, obwohl die Maßfunktion vollständig ist. Die Erweiterungsfunktion ist jedoch nicht vollständig. Diese Tatsache legt die Frage nahe, ob es Maßfunktionen gibt, die vollständig sind und die sich so erweitern lassen, daß die Erweiterungsfunktion wieder vollständig ist. Daß dies der Fall ist, sieht man bei folgendem einfachem Beispiel. Ist X ein beliebiger metrischer Raum und $M(X)$ eine Maßfunktion in ihm und A eine beliebige echte Teilmenge von R, fassen wir nun A als metrischen Raum

uf, so erzeugt $M(X)$ eine Maßfunktion im Raume A, diese läßt sich dann
erweitern, daß die Erweiterungsfunktion wieder vollständig ist. Nennen
ir eine Erweiterung einer vollständigen Maßfunktion zu einer vollständigen
laßfunktion eine Fortsetzung, so sehen wir an dem obigen mehr oder weniger
ivialen Beispiel, daß es fortsetzbare Maßfunktionen gibt. Die Untersuchung
er Möglichkeit bzw. der Eindeutigkeit, bei vorgegebenem erweitertem
efinitionsbereich, der Fortsetzung einer vollständigen Maßfunktion, in ihrer
bhängigkeit von der Maßfunktion, würde einen tieferen Einblick in die
heorie der Maßfunktionen geben. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Durch diese Verallgemeinerung des Begriffes der Maßfunktion werden
uch gewisse Eigenschaften des Systems der meßbaren Punktmengen ab-
eändert. Die Haupteigenschaften des Systems der meßbaren Punktmengen
ner vollständigen Maßfunktion kommen dadurch zum Ausdruck, daß diese
nen σ-Mengenkörper bilden. Setzen wir daher voraus, daß der Definitions-
ereich der zugrunde gelegten Maßfunktion ein σ-Mengenkörper ist, der
ußerdem noch die Vereinigungsmenge aller Mengen des Systems als Element
nthält, so läßt sich leicht zeigen, daß die für diese Maßfunktion definierten
eßbaren Punktmengen einen σ-Mengenkörper bilden. Die Beweise laufen
enen für eine vollständige Maßfunktion ganz analog. Um wieder einfacher
prechen zu können, treffen wir folgende Festsetzungen:

Definition 4. Ein Körper, der die Vereinigungsmenge aller seiner
lemente als Element enthält, heißt ein gewöhnlicher Mengenkörper.

Definition 5. Eine Maßfunktion, deren Definitionsbereich ein ge-
öhnlicher σ-Mengenkörper ist, heißt eine gewöhnliche Maßfunktion.

Wir werden bei unseren Untersuchungen gewöhnliche Maßfunktionen
ugrunde legen, dies reicht für die meisten Fälle der Praxis hin.

Um noch gewisse Eigenschaften des Raumes einfach ausdrücken zu
önnen, führen wir noch einige Definitionen ein.

Definition 6. Die Punktmenge A des metrischen Raumes R heißt
n Punkte P des Raumes R separabel, wenn es eine Umgebung U von P gibt,
daß der Durchschnitt AU höchstens separabel ist. Gibt es keine derartige
mgebung, so heißt A nicht separabel im Punkte P.

Definition 7. Eine in jedem ihrer Punkte separable Punktmenge heißt
kal separabel. Eine in jedem Punkte des Raumes separable Menge heißt
berall lokal separabel.

Eine entsprechende Erklärung gilt für den lokal separablen Raum.
m unsere Definitionen zu rechtfertigen, geben wir Beispiele von Räumen
zw. von Punktmengen, die lokal separabel, aber nicht separabel bzw. lokal
parabel, aber nicht überall lokal separabel sind.

Wir gehen von einer nicht abzählbaren Menge aus und machen dies zu einem metrischen Raum, indem wir je zwei Punkten eine feste von Null verschiedene Entfernung geben. Dieser Raum ist nicht separabel und eine Punktmenge aus ihm, die nicht abzählbar unendlich viele Punkte besitzt, ist auch nicht separabel. Zu jedem Punkte gibt es eine Umgebung, die nur diesen Punkt selbst enthält. Der Raum ist daher lokal separabel.

Zur Konstruktion einer lokal separablen, nicht überall lokal separablen Punktmenge gehen wir von einer Punktmenge der Mächtigkeit $\aleph$ aus. Wir zerlegen diese in abzählbar unendlich viele zueinander fremde Mengen A_1, $A_2, \ldots A_n, \ldots$, wobei jede dieser Mengen A_k die Mächtigkeit $\aleph$ haben soll. Wir geben nun je zwei Punkten von A_1 die Entfernung 1, wählen irgend einen Punkt aus A_1 aus, er heiße P und nennen die übrigen Elemente aus A_1 Elemente erster Ordnung, die Elemente aus A_k Elemente k-ter Ordnung. Wir legen nun folgende Entfernung fest: Je zwei Punkte k-ter Ordnung haben die Entfernung $\frac{1}{2^{k-1}}$, ein Punkt k-ter Ordnung hat von einem Punkt m-ter Ordnung $(k \neq m)$ die Entfernung $\left|\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{m-1}}\right|$, vom Punkte P die Entfernung $\frac{1}{2^{k-1}}$. Durch diese Entfernungsdefinition wird die ursprüngliche Menge zu einem metrischen Raum, denn die Entfernungsaxiome sind, wie man leicht nachrechnet, erfüllt. Dieser Raum ist in P nicht separabel, er ist daher nicht lokal separabel. Irgendeine Punktmenge aus diesem Raum, die den Punkt P nicht enthält, ist lokal separabel. Denn es gibt dann für jeden Punkt dieser Menge Umgebungen, die nur einen einzigen Punkt enthalten. Wir können aber auch Punktmengen angeben, die lokal separabel aber nicht überall lokal separabel sind. Dazu gehen wir von einer beliebigen Umgebung U des Punktes P aus und fassen die Punktmenge $A = U - P$ ins Auge. Die Punktmenge A enthält den Punkt P nicht, ist also lokal separabel, sie ist aber im Punkte P nicht lokal separabel, also ist die Punktmenge A nicht überall lokal separabel. Durch geeignete Modifikation dieses Verfahrens kann man schließlich Räume und Punktmengen konstruieren, die in keinem einzigen Punkte separabel sind; solche Punktmengen wird man dann total nicht separabel nennen. Da wir derartige Räume weiter nicht benötigen, gehen wir darauf nicht näher ein.

Aus diesen Definitionen ergeben sich die Sätze:

Satz 1. *Eine separable Punktmenge ist überall lokal separabel, eine überall lokal separable Punktmenge ist lokal separabel.*

Satz 2. *Jede Teilmenge einer separablen, bzw. überall lokal separablen bzw. lokal separablen Punktmenge ist bzw. höchstens separabel, überall lokal separabel, lokal separabel.*

Die Beweise der Sätze ergeben sich unmittelbar.

Nun übertragen wir den Begriff der Meßbarkeit in geeigneter Weise auf die Punkte. Wir gehen von irgendeiner Maßfunktion aus, deren Definitionsbereich ein Mengensystem $\mathfrak{m}$ ist, dessen Mengen, Punktmengen eines und desselben metrischen Raumes R sind und geben folgende Erklärungen:

Definition 8. Die Punktmenge A des metrischen Raumes R heißt für die Maßfunktion $M(X)$ im Punkte P des Raumes meßbar, wenn es eine Umgebung U von P gibt, so daß der Durchschnitt AU eine für $M(X)$ meßbare Punktmenge ist. Gibt es keine derartige Umgebung, so heißt A im Punkte P für $M(X)$ nicht meßbar.

Definition 9. Eine in jedem ihrer Punkte für $M(X)$ meßbare Punktmenge heißt für $M(X)$ lokal meßbar. Eine in jedem Punkte des Raumes für $M(X)$ meßbare Punktmenge heißt für $M(X)$ überall lokal meßbar.

Daraus folgert man die Sätze:

Satz 3. *Eine für $M(X)$ meßbare Punktmenge ist für $M(X)$ überall lokal meßbar. Eine für $M(X)$ überall lokal meßbare Punktmenge ist für $M(X)$ lokal meßbar.*

Satz 4. *Die Vereinigungsmenge endlich vieler und der Durchschnitt endlich vieler für eine vollständige Maßfunktion in P meßbarer bzw. überall lokal meßbarer Punktmengen ist für diese Maßfunktion in P meßbar bzw. überall lokal meßbar.*

Der Beweis des ersten Satzes liegt auf der Hand. Der andere Satz folgt einfach daraus, daß die Vereinigungsmenge und der Durchschnitt endlich vieler für eine vollständige Maßfunktion meßbarer Punktmengen für diese Maßfunktion wieder meßbar ist.

Wir wollen nun den Satz 3 für engere Voraussetzungen umkehren; zu diesem Zwecke beweisen wir den Satz:

Satz 5. *Eine für die gewöhnliche Maßfunktion $M(X)$ lokal meßbare Punktmenge, die höchstens separabel ist, ist für $M(X)$ meßbar. Eine überall lokal separable Punktmenge, die für eine vollständige Maßfunktion lokal meßbar ist, ist für diese Maßfunktion überall lokal meßbar.*

Zum Beweise des ersten Teiles des Satzes ordnen wir jedem Punkte, der den Bedingungen des ersten Teiles des Satzes genügenden Punktmenge A eine Umgebung so zu, daß der Durchschnitt dieser Umgebung mit A eine meßbare Punktmenge ist. Ist nun A höchstens separabel, so gibt es nach dem Lindelöfschen Überdeckungssatze eine endliche oder höchstens abzählbar unendliche Menge von Punkten $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$ aus A derart, daß A Teilmenge der Vereinigungsmenge der diesen Punkten zugeordneten

Umgebungen ist. Ist U_k die dem Punkte P_k zugeordnete Umgebung, so ist dann:

$$A \subset U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n + \cdots,$$

es gilt daher:

$$A = AU_1 + AU_2 + AU_3 + \cdots + AU_n + \cdots.$$

A ist daher als Vereinigungsmenge abzählbar vieler meßbarer Punktmengen darstellbar, und da wir eine gewöhnliche Maßfunktion haben, ist diese Vereinigungsmenge meßbar. A ist daher meßbar.

Wir wenden uns nun zum Beweise des zweiten Teiles des Satzes. Ist P irgendein Punkt des Raumes und A eine den Bedingungen des zweiten Teiles des Satzes genügende Punktmenge, dann gibt es eine Umgebung U des Punktes, so daß der Durchschnitt AU separabel ist. Da die zugrunde gelegte Maßfunktion eine vollständige Maßfunktion ist, ist die offene Punktmenge U meßbar und da die Punktmenge lokal meßbar vorausgesetzt wird, ist nach den Sätzen 3 und 4 auch der Durchschnitt AU lokal meßbar. Wenden wir jetzt den bereits bewiesenen ersten Teil des Satzes an, so folgt, daß AU meßbar ist. Würden wir dagegen bloß voraussetzen, daß die Maßfunktion gewöhnlich ist, so könnten wir nicht ohne weiteres schließen, daß U und AU meßbar ist.

Aus der Meßbarkeit jeder abzählbaren Punktmenge für jede vollständige Maßfunktion ergibt sich aus dem Satze 5 der

Satz 6. *Für eine vollständige Maßfunktion ist eine höchstens separable Punktmenge dann und nur dann meßbar, wenn sie in jedem in ihr liegenden Kondensationspunkt meßbar ist.*

Es sei A eine beliebige Punktmenge des zugrunde gelegten Raumes R und $M(X)$ eine Maßfunktion, dessen Definitionsbereich nur aus Mengen besteht, die Teilmengen aus R sind, wofür wir kürzer sagen wollen $M(X)$ ist eine Maßfunktion aus R, dann betrachten wir die Menge, die aus allen und nur den Punkten des Raumes R besteht, in denen A meßbar ist, sie heiße die M-Menge von A und werde mit A_m bezeichnet. Die Komplementärmenge heiße die N-Menge von A und werde mit A_n bezeichnet. Es gilt dann der Satz:

Satz 7. *Für jede Maßfunktion ist die M-Menge jeder beliebigen Punktmenge offen, ihre N-Menge ist abgeschlossen.*

Zum Beweise des Satzes haben wir zu zeigen, daß jeder Punkt der M-Menge ein innerer Punkt ist. Ist P ein beliebiger Punkt der M-Menge A_m von A, so gibt es eine Umgebung U von P derart, daß der Durchschnitt AU meßbar ist. Dann existiert aber für jeden Punkt Q von U eine Umgebung V derart, daß der Durchschnitt AV meßbar ist, man braucht für V bloß U zu setzen. Die N-Menge ist als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen.

Setzen wir voraus, daß die Punktmenge überall lokal separabel und die Maßfunktion vollständig ist, dann ist die N-Menge perfekt. Denn besäße sie einen isolierten Punkt P, so gäbe es eine Umgebung U von P, die keinen von P verschiedenen Punkt enthielte, der zur N-Menge gehört. Da die Punktmenge A überall lokal separabel ist, gibt es eine Umgebung V von P, so daß AV separabel ist. Die Punktmenge $AVU - P$ ist daher separabel und lokal meßbar, also nach Satz 5 meßbar, daher auch die Punktmenge AVU. Es würde also eine Umgebung $W = UV$ des Punktes P geben, so daß AW meßbar ist, im Gegensatz zur Annahme, daß P ein Punkt der N-Menge von A ist. Es gilt also der

Satz 8. *Für jede vollständige Maßfunktion ist die N-Menge jeder überall lokal separablen Punktmenge perfekt.*

Mit Hilfe der Sätze 3 und 5 ergibt sich unmittelbar der

Satz 9. *Für jede gewöhnliche Maßfunktion ist die M-Menge einer jeden höchstens separablen Punktmenge dann und nur dann dem Gesamtraume gleich, wenn die Punktmenge meßbar ist.*

Für eine vollständige Maßfunktion ist die M-Menge einer beliebigen überall lokal separablen Punktmenge dann und nur dann dem Gesamtraume gleich, wenn die Punktmenge lokal meßbar ist.

Die bezüglichen N-Mengen sind in den betreffenden Fällen und nur in diesen leer.

Ferner gilt der

Satz 10. *Für jede vollständige Maßfunktion hat die Komplementärmenge einer beliebigen Punktmenge dieselbe M-Menge und dieselbe N-Menge wie diese.*

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Tatsache, daß für eine vollständige Maßfunktion aus der Meßbarkeit einer Punktmenge die Meßbarkeit ihrer Komplementärmenge folgt.

Der Durchschnitt der M-Menge der beliebigen Punktmenge A mit A heiße der M-Kern von A und werde mit A_m^* bezeichnet, der Durchschnitt der N-Menge von A mit A heiße der N-Kern von A und werde mit A_n^* bezeichnet. Es ist also $A_m^* = AA_m$ und $A_n^* = AA_n$. Ist P ein beliebiger Punkt von A_m^*, so gibt es eine Umgebung U derart, daß der Durchschnitt $A_m^* U$ meßbar ist, denn P ist als Punkt von A_m^* auch Punkt von A_m, es gibt daher eine Umgebung V von P derart, daß der Durchschnitt AV meßbar ist; A ist dann in jedem Punkte von V meßbar, also ist AV Teilmenge von A_m; setzt man also $U = V$, so ist $UA_m^* = VA_m^* = VA$ eine meßbare Punktmenge. Der M-Kern ist daher lokal meßbar, ist er außerdem überall lokal separabel und die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig, so ist er nach Satz 5 überall

lokal meßbar. Ist Q ein beliebiger Punkt des N-Kernes von A, so ist für jede Umgebung U von Q der Durchschnitt UA nicht meßbar. Ist nun der M-Kern in Q meßbar, die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig (es würde genügen eine Maßfunktion vorauszusetzen, die gewöhnlich ist und deren Definitionsbereich alle offenen Punktmengen enthält), so muß der N-Kern in Q nicht meßbar sein. Machen wir für die Maßfunktion keine einschränkenden Voraussetzungen, so kann man zunächst schließen, falls die Menge A separabel ist, daß der N-Kern dann und nur dann leer ist, wenn die Punktmenge A meßbar ist. Wir haben also folgenden

Satz 11. *Für jede Maßfunktion ist der M-Kern der beliebigen Punktmenge A, das ist der Durchschnitt der M-Menge von A mit A, lokal meßbar. Ist die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig und die Punktmenge überall lokal separabel, so ist der M-Kern überall lokal meßbar.*

Um die besondere Eigenschaft gewisser N-Kerne einfach auszudrücken, geben wir noch folgende Eigenschaftserklärung:

Definition 10. Eine für eine bestimmte Maßfunktion in jedem ihrer Punkte nicht meßbare Punktmenge heißt total nicht meßbar für diese Maßfunktion.

Wir haben dann noch den Satz:

Satz 12. *Für jede vollständige Maßfunktion ist der N-Kern einer jeden überall lokal separablen Punktmenge entweder leer oder total nicht meßbar.*

Zur Formulierung des Satzes 12 bemerken wir noch, daß zwar nach Definition 10 auch die leere Menge total nicht meßbar wäre, daß es aber sprachlich ungewöhnlich wäre, eine meßbare Menge auch total nicht meßbar zu nennen, obwohl dies inhaltlich gar keinen Widerspruch bedeuten würde. Letzten Endes ist die Bezeichnungsweise reine Konvention. Wir wollen jedoch die leere Menge nicht zu den total nicht meßbaren Mengen rechnen.

Wir können nun die Ausgangsfrage unserer Entwicklungen, nämlich die nach der Zerlegung einer gegebenen nicht meßbaren Punktmenge in zwei Teilmengen mit bestimmten Meßbarkeitseigenschaften beantworten. Ist, die nicht meßbare Punktmenge A total nicht meßbar, so ist ihr M-Kern leer. Ist A nicht total nicht meßbar, so ist nach Satz 11 ihr M-Kern eine nicht leere lokal meßbare Punktmenge, ist nun A separabel und die zugrunde gelegte Maßfunktion eine gewöhnliche Maßfunktion, so ist nach Satz 5 der M-Kern meßbar, der N-Kern daher nicht meßbar. Ist dagegen die nicht meßbare Punktmenge A überall lokal separabel und die Maßfunktion vollständig, so läßt sich A nach den Sätzen 11 und 12 in eine lokal meßbare und in eine total nicht meßbare Menge zerlegen. Für vollständige Maßfunktionen sind diese Zerlegungen natürlich nicht eindeutig. Denn ist z. B. A separabel, so ist der N-Kern, weil die Punktmenge A nicht meßbar ist,

icht leer, also nach Satz 12 total nicht meßbar, also eine nicht abzählbar nendliche Menge. Wählt man daher irgendeinen Punkt aus A_n^* aus, was an auf unendlich viele verschiedene Weisen durchführen kann, und fügt an zum M-Kern von A, so ist dies auch eine Zerlegung von A in eine meßbare nd eine total nicht meßbare Teilmenge. Um die Eindeutigkeit zu erzwingen, üssen wir daher noch weitere Forderungen stellen. Wir wollen uns dabei auf ollständige Maßfunktionen und separable Punktmengen beschränken. Vir können dabei Forderungen an den meßbaren Teil der Zerlegung oder an en nicht meßbaren Teil stellen. Verlangen wir, daß der nicht meßbare Teil er Zerlegung eine umfassendste total nicht meßbare Punktmenge sein soll, o ist die Zerlegung unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig. Ist ämlich $N + M$ eine Zerlegung einer nicht meßbaren Punktmenge A, in ine umfassendste total nicht meßbare Punktmenge N und ist P ein Punkt on N, so wollen wir zeigen, daß P ein Punkt des N-Kernes von A ist. Da N otal nicht meßbar ist, ist N in P nicht meßbar, M als meßbare Punktmenge n P meßbar, A ist daher in P nicht meßbar, P also ein Punkt des N-Kernes on A. Der N-Kern von A hat also die Eigenschaft, diese total nicht meßaren Teilmengen von A als Teilmengen zu enthalten, er ist außerdem nach atz 12 total nicht meßbar, also ist der N-Kern eine umfassendste total icht meßbare Teilmenge von A und da $A - A_n^* = A_m^*$ unter den gemachten oraussetzungen meßbar ist, so ist eine derartige Zerlegung eindeutig. Wenn ir an den meßbaren Teil der Zerlegung ähnliche Forderungen stellen wollen, o können wir nicht verlangen, daß der meßbare Teil eine umfassendste eilmenge sein soll, weil es im Falle, daß A nicht meßbar ist, wie wir bereits esehen haben, ohne weitere Forderungen keine gibt. Verlangen wir aber ußerdem, daß der meßbare Teil der Durchschnitt einer offenen Punktmenge it A sein soll, so erhalten wir wieder eine eindeutige Zerlegung. Zu dem wecke zeigen wir, daß jede meßbare Teilmenge von A, die gleich dem Durchchnitt einer offenen Menge G mit A ist, Teilmenge des M-Kernes A_m^* von A ist. Besäße nämlich der meßbare Teil der Zerlegung M mit obiger Beschaffenheit inen nicht zu A_m^* gehörigen Punkt P, so gäbe es eine Umgehung U von P, o daß UM meßbar, dagegen AU nicht meßbar wäre. Nun ist aber UM leich dem Durchschnitt UAG, also P auch Punkt von G, es gibt daher eine Umgebung V von P, die Teil von G ist, so daß $VA = VAG$ ist; es ist dann VUM eine meßbare Punktmenge und da $VUM = UVAG = UVA$ gilt, ist UVA eine meßbare Punktmenge. Es gibt daher eine Umgebung $W = UV$ erart, daß AW meßbar ist, die Punktmenge A ist daher im Punkte P meßbar, daher ein Punkt des M-Kernes von A. Es kann daher AU für jede beliebige Umgebung U von P nicht nicht meßbar sein. Da nun in unserem Falle der M-Kern meßbar ist, ist eine derartige Zerlegung eindeutig. Fassen wir nun nsere Ergebnisse zusammen, so können wir also folgenden Satz aussprechen:

Satz 13. *Jede beliebige nicht leere Punktmenge läßt sich für jede beliebige Maßfunktion als Summe zweier zueinander fremder Mengen darstellen, wobei der erste Summand mindestens lokal meßbar ist und höchstens dann leer ist, wenn die Punktmenge total nicht meßbar ist.*

Jede beliebige separable Punktmenge läßt sich für jede vollständige Maßfunktion als Summe zweier zueinander fremder Mengen darstellen, wobei ein Summand leer oder total nicht meßbar ist, der andere stets meßbar ist. Ist die Punktmenge nicht meßbar, so läßt sich eine derartige Zerlegung auf unendlich viele verschiedene Weisen durchführen. Ist aber der meßbare Teil der Zerlegung ein umfassendster Durchschnitt einer offenen Punktmenge mit der gegebenen, so ist die Zerlegung eindeutig.

Für eine vollständige Maßfunktion ist die Zerlegung einer separablen nicht meßbaren Punktmenge in eine umfassendste total nicht meßbare Punktmenge und in eine meßbare Punktmenge stets und eindeutig durchführbar.

Wir wenden uns nun den total nicht meßbaren Punktmengen zu. Ihre Existenz ist nach Satz 12 für diejenigen vollständigen Maßfunktionen gesichert, für die es nicht meßbare Punktmengen gibt, die überall lokal separabel sind. Z. B. ist der n-dimensionale Inhalt eine derartige Maßfunktion. Hierher gehörende Fragen werden wir später noch näher behandeln.

Für die folgenden Untersuchungen wollen wir voraussetzen, daß die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig ist. Ist T eine total nicht meßbare Punktmenge, so ist jeder Punkt derselben ein Randpunkt. Denn in jedem inneren Punkt ist jede Menge für jede vollständige Maßfunktion meßbar. Entsprechendes gilt natürlich allgemeiner für den N-Kern einer Punktmenge. Es ergeben sich somit die Sätze:

Satz 14. *Für eine vollständige Maßfunktion ist der N-Kern jeder Punktmenge Teil des Randes der Punktmenge.*

Satz 15. *Jede, für eine beliebige vollständige Maßfunktion total nicht meßbare Punktmenge ist eine insichdichte nicht abzählbare Randmenge. Ihre abgeschlossene Hülle ist perfekt.*

Ferner haben wir den

Satz 16. *Der Rand der Komplementärmenge einer jeden, für eine vollständige Maßfunktion total nicht meßbaren Punktmenge ist total nicht meßbar.*

Der Beweis dieses Satzes liegt auf der Hand.

In diesem Zusammenhang haben wir noch folgenden wichtigen Satz:

Satz 17. *Der Rand einer jeden, für eine vollständige Maßfunktion nicht meßbaren Punktmenge ist für diese Maßfunktion nicht meßbar und umgekehrt.*

Der Rand einer überall lokal meßbaren Punktmenge ist überall lokal meßbar nd umgekehrt.

Der Rand einer total nicht meßbaren Punktmenge ist total nicht meßbar.

Ist nämlich die Punktmenge A für die vollständige Maßfunktion $M(X)$ ießbar, so ist der Rand als Durchschnitt der meßbaren Punktmenge A mit er Begrenzung von A, die als abgeschlossene Punktmenge für $M(X)$ meßbar t, meßbar. Ist umgekehrt der Rand einer Punktmenge für $M(X)$ meßbar, so t auch der Rand der Komplementärmenge der gegebenen Punktmenge ls Differenz einer abgeschlossenen und einer meßbaren Punktmenge meßbar. Die gegebene Punktmenge ist nun gleich der Differenz aus ihrer abgeschlossenen Hülle weniger dem Rand der Komplementärmenge, daher meßbar. Der Beweis des zweiten Teiles des Satzes wird analog durchgeführt. Der dritte Teil folgt aus dem Satz 15. Die Umkehrung gilt hier im allgemeinen natürlich nicht [2]).

Wir wenden uns nun der Frage der Zerlegung der nicht meßbaren Punktmengen in nicht meßbare Teilmengen zu. Nehmen wir das Ergebnis vorweg, so handelt es sich um folgenden Satz:

Satz 18. *Eine beliebige überall lokal separable Punktmenge, die für eine vollständige Maßfunktion nicht lokal meßbar ist, läßt sich in eine vorgeschriebene endliche oder abzählbar unendliche Anzahl zueinander fremder nicht meßbarer Summanden zerlegen. Ist die Menge total nicht meßbar, so können auch die Summanden total nicht meßbar angenommen werden.*

Nach Satz 12 genügt es, den zweiten Teil des Satzes zu beweisen. Ist also A eine beliebige total nicht meßbare Punktmenge, die nach Satz 18 zerlegt werden soll, so wählen wir einen beliebigen Punkt P von A aus und ordnen ihm eine Umgebung U zu. Ist $\bar{U}$ die abgeschlossene Hülle von U und bilden wir den Durchschnitt $A\bar{U} = B$, so ist die Punktmenge B total nicht meßbar. Ist Q ein beliebiger Punkt von $A - B$, so gibt es eine Umgebung V von Q derart, daß VB leer ist, es ist dann $V(A - B) = VA$ nicht meßbar und es ist daher für jede beliebige Umgebung W von Q der Durchschnitt $W(A - B)$ nicht meßbar. Die Punktmenge $A - B$ ist daher total nicht meßbar. Nun wählen wir eine Anzahl, die um 2 kleiner als die Anzahl der vorgeschriebenen Summanden ist, von Punkten aus B aus, die höchstens eine nicht auf die Begrenzung von $\bar{U}$ fallende Häufungsstelle haben. Ist $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n, \ldots$ diese Folge, dann ordnen wir jedem P_k eine Umgebung so zu, daß der Durchschnitt der abgeschlossenen Hüllen irgend zweier dieser Umgebungen leer ist. Ist B_k der Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle der Umgebung des Punktes P_k mit A, dann sind diese Punktmengen B_k für jedes

[2]) Aus $A = G + R$ (R Rand von A) ergibt sich ein weiterer Beweis des Satzes 17.

in Frage kommende k total nicht meßbar. Die Restmenge, die durch Subtraktion aller B_k von B entsteht, ist auch total nicht meßbar. Denn ist C ein beliebiger Punkt der Restmenge, so hat er entweder von der Summe aller B_k einen positiven Abstand oder er ist Häufungspunkt dieser Summe. Im letzteren Falle muß er mit dem Häufungspunkt der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ zusammenfallen. Im ersteren Falle folgt nun genau wie oben, daß die Restmenge in C nicht meßbar ist. Im zweiten Falle ist C, da die Folge der Punkte $P_1, P_2, \ldots$ höchstens einen Häufungspunkt besitzt, auch Häufungsstelle von Punkten der Restmenge, in denen diese nicht meßbar ist; die Restmenge ist daher in C nicht meßbar. Damit sind wir am Ziele.

Ein unendliches System total nicht meßbarer Punktmengen, wie es sich bei der Zerlegung einer total nicht meßbaren Punktmenge ergibt, hat die Eigenschaft, daß die Summe und die Differenz zweier verschiedener Mengen des Systems wieder eine Menge des Systems ist. Auch die Summe einer unendlichen Folge von Mengen des Systems ist eine Menge des Systems. Wir haben daher den

Satz 19. *Es gibt Systeme total nicht meßbarer Punktmengen, die mit der leeren Menge einen σ-Mengenkörper bilden.*

Wir wenden uns nun Fragen der Existenz und Bildung nicht meßbarer Punktmengen zu. Wie bereits erwähnt, hängt die Existenz nicht meßbarer Punktmengen wesentlich von der Maßfunktion und dem zugrunde gelegten Raum ab. Es gibt Räume, so daß für jede beliebige Maßfunktion jede beliebige Punktmenge des betreffenden Raumes meßbar ist. Z. B. ein Raum, bei dem je zwei Punkte eine Entfernung haben, die größer ist als eine positive feste Zahl, hat diese Eigenschaft. Die Eigenschaft einer Punktmenge, meßbar zu sein, kann sich in manchen Fällen durch Abänderung des Definitionsbereiches der Maßfunktion ändern. Nehmen wir z. B. eine für die Maßfunktion $M(X)$ nicht meßbare Punktmenge A, dann erzeugt $M(X)$ eine Maßfunktion $L(X)$ in der als Raum aufgefaßten Punktmenge A. Für $L(X)$ ist A als Gesamtraum meßbar. Die Punktmenge A ist also für die Maßfunktion $L(X)$ meßbar, für die Maßfunktion $M(X)$, die eine Erweiterung von $L(X)$ ist, jedoch nicht meßbar. Wir wollen daher zunächst die Abhängigkeit der Meßbarkeit einer Punktmenge vom Definitionsbereich der Maßfunktion näher untersuchen. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst den

Satz 20. *Für eine vollständige Maßfunktion $M(X)$ ist die beliebige Teilmenge B der für diese Maßfunktion meßbaren Punktmenge A dann und nur dann meßbar, wenn für jede Punktmenge W von endlichem äußeren Maße, die Teilmenge von A ist, die Gleichung*

$$M(W) = M(BW) + M(W - BW)$$

besteht.

Nach Voraussetzung ist die Punktmenge A für die vollständige Maßunktion $M(X)$ meßbar, also gilt, wenn Y eine Punktmenge endlichen äußeren Maßes ist, die Beziehung:

$$M(Y) = M(AY) + M(Y - AY). \tag{1}$$

Setzen wir $AY = Y_1$, so ist Y_1 eine Teilmenge von A, also gilt die Beziehung

$$M(Y_1) = M(BY_1) + M(Y_1 - BY_1). \tag{2}$$

Zu beweisen ist die Gleichung:

$$M(Y) = M(BY) + M(Y - BY). \tag{3}$$

Es gelten dann folgende Relationen:

$$Y - YB = (Y - Y_1) + (Y_1 - Y_1B),\ M(Y) \leqq M(YB) + M(Y - YB); \tag{4}$$

aus der ersten dieser Relationen folgt mit Hilfe von (1) und (2)

$$M(Y - YB) \leqq M(Y) - M(Y_1) + M(Y_1) - M(Y_1B) = M(Y) - M(Y_1B),$$

es gilt daher:

$$M(Y) \geqq M(Y - YB) + M(Y_1B),$$

und da $M(Y_1B) = M(YB)$, so haben wir:

$$M(Y) \geqq M(YB) + M(Y - YB). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt nun die zu beweisende Gleichung (3)[3].

Aus diesem Satze folgt nun der

Satz 21. *Die Eigenschaft einer Punktmenge für eine vollständige Maßfunktion meßbar bzw. nicht meßbar, bzw. lokal meßbar, bzw. überall lokal meßbar, bzw. total nicht meßbar zu sein, wofür wir kurz sagen wollen, die Meßbarkeitseigenschaften der Punktmenge bleiben bei einer Erweiterung gleichzeitig für alle Punktmengen des ursprünglichen Raumes dann und nur dann erhalten, wenn der ursprüngliche Raum für die Erweiterungsmaßfunktion meßbar ist.*

Der Beweis dieses Satzes mit Hilfe von Satz 20 liegt auf der Hand.

Wir wenden uns nun der Frage nach der Existenz von Punktmengen, die in jedem Punkt des Raumes nicht meßbar sind, zu. Dazu ist offenbar notwendig, daß für die zugrunde gelegte Maßfunktion für jeden Punkt des Raumes mindestens eine Punktmenge vorhanden sei, die in diesem Punkte nicht meßbar ist. Nun wollen wir zeigen, daß dies auch hinreicht, falls die zugrunde gelegte Maßfunktion vollständig ist. Existiert also zu jedem Punkte eine dort nicht meßbare Punktmenge, dann ist jeder Punkt des

[3]) Für reguläre Maßfunktionen läßt sich der Beweis mit Hilfe der für sie geltenden Meßbarkeitsbedingung vereinfachen.

Raumes auch Punkt einer total nicht meßbaren Punktmenge, falls diese Punktmengen überall lokal separabel sind. Es gibt dann zu jedem Punkt eine Umgebung, so daß der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hülle mit der in diesem Punkte nicht meßbaren Punktmenge total nicht meßbar ist. Dieser Durchschnitt heiße D_1. Irgendein Punkt des Raumes gehört entweder zu D_1 oder nicht zu D_1. Ist der Punkt Häufungspunkt von D_1, so ist D_1 dort nicht meßbar. Bei positivem Abstand konstruieren wir für diesen genau so wie für den ersten Punkt eine total nicht meßbare Punktmenge, für die wir außerdem verlangen, daß ihre abgeschlossene Hülle zur abgeschlossenen Hülle von D_1 fremd ist. Dieses Verfahren setzen wir soweit als möglich fort. Irgendein Punkt des Raumes ist dann entweder Punkt der Vereinigungsmenge all dieser Punktmengen oder Häufungspunkt derselben, in jedem dieser Fälle aber ist diese Vereinigungsmenge V nicht meßbar in dem betreffenden Punkte. V ist daher eine in jedem Punkte des Raumes nicht meßbare Punktmenge. Wir haben also folgenden

Satz 22. *In jedem lokal separablen Raume ist für die Existenz einer für eine vollständige Maßfunktion in jedem Punkte des Raumes nicht meßbaren Punktmenge notwendig und hinreichend, daß es zu jedem Punkte des Raumes eine dort nicht meßbare Punktmenge gibt.*

Die vorhergehenden Überlegungen legen die Frage nahe, ob es für die Existenz einer in jedem Punkte des Raumes nicht meßbaren Punktmenge nicht genügt, daß es überhaupt eine für die betreffende Maßfunktion nicht meßbare Punktmenge gibt. Für irgendeinen Raum genügt dies natürlich nicht, man braucht z. B. nur einen Raum zu betrachten, der die Vereinigungsmenge eines Intervalls und einer zum Intervall fremden endlichen Menge ist. Dieser Raum hat aber eine ungewöhnliche Eigenschaft, er ist, wie wir rein anschauungsmäßig feststellen, inhomogen. Um nun derartige Eigenschaften mathematisch ausdrücken zu können, geben wir einige hierher gehörende Begriffsbildungen. Da die Terminologie nicht völlig einheitlich ist, setzen wir einige bekannte Erklärungen her.

Definition 11. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und P ein beliebiger Punkt aus ihm und a eine beliebige reelle positive Zahl, so heißt die Punktmenge, die aus allen und nur den Punkten des Raumes besteht, deren Entfernung vom Punkte P kleiner als a ist, eine einfache Umgebung des Punktes P, a der Radius der einfachen Umgebung.

Definition 12. Eine Abbildung heißt entfernungstreu, wenn die Bildpunkte je zweier verschiedener Punkte die gleiche Entfernung haben wie ihre Urbilder. Sie heißt doppelt entfernungstreu, wenn die Abbildung und ihre Umkehrung entfernungstreu sind.

Es gilt dann der leicht zu beweisende

Satz 23. *Die Umkehrabbildung jeder entfernungstreuen Abbildung ist eindeutig.*

Jede eindeutige entfernungstreue Abbildung ist doppelt entfernungstreu.

Jede doppelt entfernungstreue Abbildung ist eineindeutig.

Definition 13. Zwei Punktmengen, die doppelt entfernungstreu aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent.

Definition 14. Ein Raum heißt homogen, wenn je zwei einfache Umgebungen mit gleichen Radien kongruent sind.

Definition 15. Eine Maßfunktion heißt homogen, wenn sie je zwei kongruenten Punktmengen ihres Definitionsbereiches gleiche Funktionswerte zuordnet.

Die in der Analysis betrachteten Räume sind meist homogen, eine Beschränkung auf homogene Räume bedeutet daher in vielen Fällen keine besondere Einschränkung. Dagegen bedeutet eine Beschränkung auf homogene Maßfunktionen eine wesentliche Einschränkung, die sich im folgenden Satz ausdrückt:

Satz 24. *Zwischen irgendeiner vollständigen homogenen Maßfunktion $M(X)$, deren Definitionsbereich ein n-dimensionaler euklidischer Raum ist und für die es eine offene Menge mit endlichem und von Null verschiedenem äußeren Maße gibt, und dem n-dimensionalen Inhalt $I(X)$ besteht die Gleichung*

$$M(X) = aI(X),$$

worin a eine positive reelle Zahl bedeutet.

Da wir den Satz weiter nicht benutzen, verzichten wir auf den Beweis. Er sollte bloß als Demonstration der obigen Behauptung gelten. Ein ähnlicher Satz gilt zwischen irgend zwei vollständigen homogenen Maßfunktionen in allgemeineren homogenen Räumen.

Der Vollständigkeit halber berichten wir noch folgenden Satz:

Satz 25. *Im homogenen separablen Raum läßt sich jede gewöhnliche homogene Maßfunktion, deren Definitionsbereich eine Folge offener Punktmengen mit genau einpunktigem Durchschnitt enthält, zu einer vollständigen homogenen Maßfunktion erweitern. Ist die ursprüngliche Maßfunktion regulär, so gibt es unter allen möglichen Erweiterungen nur eine einzige vollständige homogene reguläre Erweiterung.*

Ein Beispiel dafür, daß es mehrere Erweiterungen solcher Maßfunktionen gibt, ist folgendes: Der für alle inhaltsmeßbaren Punktmengen definierte äußere Inhalt stellt eine den obigen Forderungen genügende Maßfunktion dar. Diese Maßfunktion läßt sich nun zum äußeren Inhalt im Gesamtraum

erweitern, aber auch das arithmetische Mittel aus äußerem und inneren Inhalt stellt, wie allgemein bekannt ist, eine Maßfunktion vor, die im Gesamtraum definiert ist.

Ein ähnlicher Satz gilt in allgemeineren homogenen Räumen.

Kehren wir nun zur Konstruktion nicht meßbarer Punktmengen zurück. Ist R ein homogener Raum, $M(X)$ eine vollständige homogene Maßfunktion für die es nicht meßbare Punktmengen gibt, wobei mindestens eine dieser Punktmengen separabel ist, dann wollen wir zeigen, daß es eine in jedem Punkte des Raumes nicht meßbare Punktmenge gibt. Zu diesem Zwecke benötigen wir folgenden Satz:

Satz 26. *In jedem homogenen Raum haben je zwei kongruente Punktmengen für jede homogene vollständige Maßfunktion die gleichen Meßbarkeitseigenschaften.*

Der Beweis ergibt sich unschwer aus der Definition der hier verwendeten Begriffe.

Ist nun R ein homogener Raum und A eine für die homogene vollständige Maßfunktion $M(X)$ im Punkte P nicht meßbare Punktmenge, dann gibt es eine Umgebung U von P, so daß der Durchschnitt $\bar{U} A_n^*$ der abgeschlossenen Hülle $\bar{U}$ von U mit A_n^* nicht meßbar ist. Ist nun A überall lokal separabel, so läßt sich U so wählen, daß dieser Durchschnitt total nicht meßbar ist. Ist dann V eine beliebige Umgebung von P, die Teilmenge von U ist, so ist auch der Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle V von V mit A_n^* total nicht meßbar. Ist Q ein beliebiger Punkt des Raumes, so ist er entweder Punkt oder Häufungspunkt von $U A_n^*$ oder er hat einen positiven Abstand von dieser Menge. In den beiden ersten Fällen ist $\bar{U} A_n^*$ nicht meßbar in Q, im letzteren Falle gibt es eine einfache Umgebung W von Q, so daß, wenn $\bar{W}$ die abgeschlossene Hülle von W bedeutet, der Durchschnitt $\bar{U} A_n^* \bar{W}$ leer ist und es außerdem eine zu W gleichradige einfache Umgebung W_1 von P gibt, so daß diese Teilmenge von U ist. Bilden wir nun diese letztere Umgebung eindeutig und entfernungstreu auf W ab, was wegen der vorausgesetzten Homogenität des Raumes möglich ist, so wird bei dieser Abbildung die in P nicht meßbare Punktmenge $A_n^* W_1$, wobei W_1 die zu W gleichradige Umgebung von P ist, in eine im Punkte Q nicht meßbare Punktmenge übergeführt (Satz 26). Da Q ein beliebiger Punkt des Raumes war, gibt es unter den gemachten Voraussetzungen eine in jedem Punkte des Raumes nicht meßbare Punktmenge. Verbinden wir dieses Ergebnis mit Satz 23, so erhalten wir den

Satz 27. *In jedem lokal separablen homogenen Raum ist für die Existenz einer für eine vollständige homogene Maßfunktion in jedem Punkt des Raumes nicht meßbaren Punktmenge notwendig und hinreichend, daß es für mindestens einen Punkt des Raumes mindestens eine dort nicht meßbare Punktmenge gibt*

In jedem separablen homogenen Raum ist für die Existenz einer derartigen unktmenge notwendig und hinreichend, daß es mindestens eine nicht meßbare unktmenge gibt.

Wir wenden uns nun den nicht meßbaren Funktionen zu. Wir knüpfen die Definition der meßbaren Funktionen an. Ist R ein beliebiger metrischer aum und A eine beliebige Punktmenge aus ihm, dann heißt in bekannter eise die Punktfunktion $f(P)$, deren Definitionsbereich A ist, meßbar, wenn r jede reelle Zahl a die Punktmengen $A(f > a)$, $A(f < a)$, $A(f \geqq a)$, $(f \leqq a)$, und die Punktmengen $A(f = +\infty)$, $A(f = -\infty)$ meßbar sind. abei ist die Punktmenge $A(f > a)$ die Menge, die aus allen und nur den unkten der Punktmenge A besteht, in denen $f(P) > a$ ist. Analog sind die nderen Symbole erklärt. Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar, daß ne Punktmenge, auf der es mindestens eine meßbare Funktion gibt, meßbar in muß. Auf einer nicht meßbaren Punktmenge ist demnach jede beliebige unktion nicht meßbar. Fassen wir aber den Definitionsbereich A als meischen Raum auf und beschränken den Definitionsbereich der zugrunde legten Maßfunktion auf die Teilmengen von A, so ist, gleichgültig ob A im rsprünglichen Raum für die zugrunde gelegte vollständige Maßfunktion eßbar ist oder nicht, z. B. jede auf A halbstetige Funktion meßbar. Da nun r Definitionsbereich einer Funktion das Primäre ist und im Falle einer unktfunktion, der den Definitionsbereich enthaltende Raum sekundärer atur ist, scheint es zweckmäßig zu sein, neben der gewöhnlichen Meßbarkeit ch eine auf den Definitionsbereich bezogene relative Meßbarkeit in Betracht ziehen. Zu diesem Zwecke geben wir folgende

Definition 16. Ist R ein beliebiger metrischer Raum und $M(X)$ eine llständige Maßfunktion in R, A eine beliebige Punktmenge und $L(X)$ die rch $M(X)$ in A erzeugte, in A vollständige Maßfunktion, dann heißt die unktfunktion $f(P)$ mit dem Definitionsbereich A relativ zu A meßbar, wenn $P)$ für $L(X)$ meßbar ist.

Bei der relativen Meßbarkeit wird also im allgemeinen eine andere Maßnktion zugrunde gelegt, es wird im allgemeinen der Definitionsbereich abändert. Für relativ zu A meßbar könnte man auch zweckmäßig minimal eßbar sagen, denn gehen wir umgekehrt vom Definitionsbereich der Funktion s und erweitern diesen mit der in ihm definierten Maßfunktion zum vorgebenen Raum und der in ihm definierten Maßfunktion, so ist bei jeder liebigen Erweiterung dieser Art jede für den Raum meßbare Funktion lativ zum Definitionsbereich meßbar.

Zwischen der relativen und der gewöhnlichen Meßbarkeit einer Funktion steht die folgende wichtige Beziehung:

Satz 28. *Die auf A definierte relativ zu A meßbare Funktion ist in einem beliebigen A umfassenden Raume für eine vollständige Maßfunktion, die eine Erweiterung der in A definierten ist, dann und nur dann meßbar, wenn A für die erweiterte Maßfunktion meßbar ist.*

Der Beweis ergibt sich aus Satz 20.

Um nun eine feinere Theorie der nicht meßbaren Funktionen zu entwickeln, betrachten wir zunächst zwei Beispiele nicht meßbarer Funktionen.

1. Beispiel. Im linearen abgeschlossenen Intervall $[0, 2]$ ist die Funktion wie folgt definiert: In $[0, 1]$ ist $F(P) = 0$; das Intervall $(1, 2]$ stellen wir als Summe zweier total nicht meßbarer zueinander fremder Punktmengen dar, $(1, 2] = A + B$, in jedem Punkte von A ist $F(P) = 1$, in jedem Punkte von B ist $F(P) = 2$. Diese Funktion ist nicht meßbar, auch relativ nicht meßbar, aber der Definitionsbereich enthält ein Teilintervall, in dem $F(X)$ meßbar ist.

2. Beispiel. Wir zerlegen das lineare Intervall $[-1, 1)$ durch die Punkte $\frac{\pm 1}{n}$, wobei n eine natürliche Zahl bedeutet, in links geschlossene Intervalle. Bezeichnen wir das den Endpunkt $\frac{1}{n}$ enthaltende Intervall mit I_n, das den Endpunkt $\frac{-1}{n}$ enthaltende Intervall mit I_n' und zerlegen I_n bzw. I_n' in zueinander fremde total nicht meßbare Mengen A_n, B_n bzw. A_n', B_n', also $A_n + B_n = I_n$, $A_n' + B_n' = I_n'$, dann erklären wir die Funktion $f(P)$ folgendermaßen: $f(0) = 0$, $f(P) = 0$, wenn P ein Punkt der Vereinigungsmenge aller $A_n + A_n'$ ist, $f(P) = \frac{1}{n^2}$, wenn P ein Punkt von $B_n + B_n'$ ist. Der einzige Stetigkeitspunkt dieser Funktion ist der Punkt 0; dies ergibt sich daraus, daß nach Satz 15 eine total nicht meßbare Punktmenge eine Randmenge ist. Die Funktion ist aber auch differenzierbar im Punkte 0, wie man leicht nachrechnet. Diese Funktion ist nicht meßbar, auch gibt es kein Teilintervall, in dem die Funktion meßbar oder relativ meßbar wäre.

Das erste Beispiel zeigt, daß es nicht meßbare Funktionen gibt, die in einem Teilintervall des Definitionsbereiches konstant sind. Das zweite Beispiel zeigt, daß es Funktionen mit Stetigkeitspunkten, ja sogar mit Punkten, in denen die Funktion differenzierbar ist, gibt und die in keinem Teilintervall relativ zum Definitionsbereich meßbar sind. Mit dem bisher üblichen Begriff der Meßbarkeit einer Funktion läßt sich nur aussagen, daß beide nicht meßbar sind. Um also auch eine Unterscheidung in solchen Fällen durchzuführen, schaffen wir den Begriff der lokalen Meßbarkeit einer Funktion. Wir geben folgende

Definition 17. Ist R ein beliebiger metrischer Raum, A eine beliebige Punktmenge aus ihm, $M(X)$ eine Maßfunktion mit dem Definitionsbereich R,

ann heißt die Punktfunktion $f(P)$ mit dem Definitionsbereich A im Punkte Q es Raumes (Q braucht nicht Punkt von A zu sein) für $M(X)$ meßbar, wenn s eine Umgebung U von Q gibt, so daß die auf dem Durchschnitt UA durch f rzeugte Funktion (die Teilfunktion f, UA) für $M(X)$ meßbar ist. Sie heißt elativ zu A meßbar im Punkte Q, wenn die obige Bedingung für die auf A eduzierte Maßfunktion erfüllt ist.

Eine in einem Punkte des Raumes relativ zum Definitionsbereich meßbare unktion braucht natürlich dort nicht meßbar zu sein, ist dagegen die Funktion n einem Punkte auf den Definitionsbereich bezogen nicht meßbar, dann ist e nach Satz 20 für jede beliebige zulässige Erweiterung in diesem Punkte icht meßbar. Sie ist dann absolut nicht meßbar in diesem Punkte. Aus den ätzen 20 und 28 ergibt sich dann der

Satz 29. *Eine beliebige im Punkte P relativ meßbare Funktion ist dann nd nur dann in P meßbar, wenn der Definitionsbereich in P meßbar ist.*

Eine beliebige Funktion ist natürlich in einem nicht meßbaren Punkt es Definitionsbereiches nicht meßbar, da aber der Definitionsbereich für ie auf den Definitionsbereich reduzierte Maßfunktion meßbar in dem beeffenden Punkt ist, so gibt es dort relativ meßbare Funktionen. Auf die ier auftretenden Möglichkeiten gehen wir später noch näher ein. Anchließend geben wir noch folgende auf der Hand liegende Erklärung:

Definition 18. Eine in jedem Punkte des Raumes meßbare Funktion eißt überall lokal meßbar. Eine in jedem Punkte des Definitionsbereiches neßbare Funktion heißt lokal meßbar.

Analog wird die relative lokale Meßbarkeit erklärt. Ferner gilt der aus em Satz 5 folgende und ihm entsprechende Satz:

Satz 30. *Jede lokal, bzw. relativ lokal meßbare Funktion, deren Definitionsereich überall lokal separabel ist, ist überall lokal, bzw. relativ überall lokal neßbar; ist ihr Definitionsbereich separabel, so ist die Funktion meßbar, bzw. elativ meßbar.*

Ferner gilt der aus dem Satz 21 folgende, die Sätze 28 und 29 ergänzende

Satz 31. *Die Meßbarkeitseigenschaften einer Funktion bleiben bei einer rweiterung gleichzeitig für alle Funktionen des Definitionsbereiches dann und ur dann erhalten, wenn der Definitionsbereich im neuen Bereich meßbar ist.*

Wir können jetzt die Funktionen der beiden Beispiele dadurch charakrisieren, daß wir feststellen, daß die erste Funktion nicht in jedem Punkte es Definitionsbereiches nicht meßbar ist, während die zweite in jedem Punkte es Definitionsbereiches nicht meßbar ist, also ein Beispiel einer total nicht eßbaren Funktion ist. Dabei haben wir den Begriff total nicht meßbar ganz nlich wie für Punktmengen zu erklären.

Definition 19. Eine Punktfunktion heißt total nicht meßbar, wenn sie in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches nicht meßbar ist. Sie heißt absolut total nicht meßbar, wenn sie für jeden den Definitionsbereich umfassenden Bereich (das ist ein den gegebenen Definitionsbereich umfassender Raum mit einer vollständigen Maßfunktion, die mit der ursprünglichen Maßfunktion identisch ist oder eine Erweiterung derselben ist) total nicht meßbar ist.

Daraus ergibt sich der Satz:

Satz 32. *Jede auf einer beliebigen total nicht meßbaren Punktmenge definierte Punktfunktion ist total nicht meßbar.*

Satz 33. *Eine Funktion ist dann und nur dann absolut total nicht meßbar, wenn sie relativ zum Definitionsbereich total nicht meßbar ist.*

Die Funktion des zweiten Beispiels ist offenbar eine absolut total nicht meßbare Funktion.

Ist eine Funktion in einem Punkte meßbar, so ergibt sich aus der Definition dieser Meßbarkeit und dem Satz 3, daß dann die Funktion in jedem Punkte einer Umgebung meßbar ist. Die Menge aller Punkte des Raumes, in denen eine Funktion meßbar ist, ist daher offen. Ist P ein Punkt, in welchem die Funktion nicht meßbar ist, so gibt es für jede Umgebung U von P eine reelle Zahl a, so daß mindestens eine der Punktmengen $UA(f > a)$, $UA(f < a)$, $UA(f \geqq a)$, $UA(f \leqq a)$ . . . nicht meßbar ist, dabei bedeutet A den Definitionsbereich der Funktion. Ist nun A überall lokal separabel, so besitzt die obige nicht meßbare Darstellungsmenge einen nicht leeren total nicht meßbaren Kern (Satz 12) bei geeigneter Wahl der Umgebung U. In jedem Punkt dieses Kernes ist aber die Funktion nicht meßbar. Der Punkt P ist daher Häufungspunkt von Punkten, in denen die Funktion nicht meßbar ist. Noch einfacher hierfür ist folgender Beweis: Ist A in P separabel und gibt es eine Umgebung des Punktes P, so daß die Funktion in jedem Punkte dieser Umgebung meßbar ist, so ist sie nach Satz 5 auch in P meßbar. Wir erhalten also den

Satz 34. *Die Menge aller Punkte des Raumes, in denen die beliebige Funktion $f(P)$ meßbar ist, ist offen. Die Menge aller Punkte des Raumes, in denen $f(P)$ nicht meßbar ist, ist abgeschlossen; ist der Definitionsbereich von $f(P)$ überall lokal separabel, so ist sie perfekt.*

Wir können jetzt, ähnlich wie für die meßbaren Funktionen, eine Theorie der Systeme von in einem und demselben Punkte meßbarer Funktionen entwickeln. Es gilt folgender Satz:

Satz 35. *Die Summe endlich vieler und das Produkt endlich vieler im gleichen Punkte meßbarer Funktionen sind in diesem Punkte meßbar. Die Differenz und der Quotient zweier in demselben Punkte meßbarer Funktionen*

ind in diesem Punkte meßbar. Dabei wird vorausgesetzt, daß die verlangten perationen ausführbar sind.

Die Sätze für Folgen von meßbaren Funktionen lassen sich nicht ohne inschränkung übertragen. Um ein Beispiel hierfür zu geben, gehen wir von er Funktion des zweiten Beispiels aus. Nennen wir diese $f(P)$, so wollen ir $f_n(P) = f(P)$ setzen, wenn P ein Punkt der dort definierten Intervalle I_n t. In jedem anderen Punkte sei $f_n(P) = 0$. Jede dieser Funktionen ist im unkte 0 meßbar, ihre obere Grenze ist jedoch nicht meßbar im Punkte 0. s gibt eben in diesem Falle keine Umgebung des Punktes 0, in der gleichitig alle Funktionen der Folge meßbar sind. Gibt es dagegen eine derartige mgebung, so gelten dieselben Sätze wie für meßbare Funktionen. Wir geben och folgende

Definition 20. Irgendeine Menge von Punktfunktionen mit dem gemeinamen Definitionsbereich A heißt im Punkte P gleichmäßig meßbar, wenn es ine Umgebung U von P gibt, so daß jede Funktion der Menge in UA meßar ist.

Es gilt dann offenbar der Satz

Satz 36. *Die obere und die untere Grenze endlich vieler in demselben Punkte eßbarer Funktionen sind in diesem Punkte meßbar. Die obere und die untere renze der Limes superior und der Limes inferior einer unendlichen Folge von n Punkte P gleichmäßig meßbarer Funktionen sind in P meßbar.*

Auch den Begriff der äquivalenten Funktionen können wir in den Kreis er Betrachtungen ziehen. Es gilt offenbar der Satz:

Satz 37. *Äquivalente Funktionen haben die gleichen Meßbarkeitseigenchaften.*

Wir wenden uns nun der feineren Theorie der in einem Punkte nicht meßaren Funktionen zu. Ist der Definitionsbereich in dem ins Auge gefaßten unkt nicht meßbar, so ist dort, wie bereits festgestellt, jede Funktion nicht eßbar. Das Unregelmäßige liegt hier schon im Definitionsbereich. Derartige unkte gibt es bei der relativen Meßbarkeit natürlich nicht. Ist zweitens der efinitionsbereich im Punkte P meßbar, $f(P)$ dagegen nicht, so gibt es entveder eine reelle Zahl a derart, daß für jede Umgebung, die Teilmenge einer esten Umgebung von P ist, eine der Darstellungsmengen der Funktion, ezogen auf den Durchschnitt dieser Umgebung mit dem Definitionsbereich, icht meßbar ist. Die Funktion wollen wir in diesem Falle von dritter Art ennen im Punkte P. Den Punkt P nennen wir dann einen Punkt dritter rt für die Funktion. Oder es gibt keine derartige reelle Zahl, dann nennen ir den Punkt einen Punkt zweiter Art für die Funktion. Einen Punkt, in em die Funktion meßbar ist, nennen wir dann in diesem Zusammenhang

einen Punkt erster Art für die Funktion. Man überzeugt sich an Beispielen, daß derartige Punkte jeder Art existieren. Die Punkte erster Art bilden eine offene Punktmenge, die Punkte vierter Art bilden bei überall lokal separablem Definitionsbereich eine perfekte Punktmenge. Wir haben also den Satz:

Satz 38. *Für jede beliebige Punktfunktion bilden alle Punkte erster Art eine offene Punktmenge, die Vereinigungsmenge der Punkte zweiter, dritter und vierter Art ist abgeschlossen.*

Ist der Definitionsbereich überall lokal separabel, so bildet die Menge aller Punkte vierter Art eine perfekte Punktmenge.

Ist der Definitionsbereich meßbar, so gibt es keine Punkte vierter Art.

(Eingegangen am 24. Oktober 1942.)

Über eine Erweiterung des Äquivalenzsatzes der C- und H-Verfahren und eine Klasse regulär wachsender Funktionen.

Herrn Constantin Carathéodory zum 70. Geburtstag gewidmet.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Einleitung.

In einer vorangehenden Arbeit[1]), in der ein Beweis des Äquivalenzsatzes der Cesàroschen und Höldersehen Limitierungsverfahren einheitlich für Folgen und Funktionen dargestellt wurde, war einleitend schon die weitgehende Verallgemeinerung dieses Satzes erwähnt, die I. Schur [3][2]) für Zahlenfolgen und ganzzahlige Ordnung bewiesen hatte und die im wesentlichen besagt, daß nicht nur die Konvergenz der C- und H-Mittel gleicher Ordnung k, sondern auch ihr asymptotisches Verhalten sehr eng gekoppelt ist. Sein Beweis setzt die Ordnung k wesentlich als ganzzahlig voraus und ist nicht auf beliebige reelle k übertragbar. Auch auf Funktionen (statt Folgen) läßt sich der dort gegebene Beweis ohne wesentliche Einschränkung anderer Art nicht übertragen[3]).

Im folgenden soll nun zunächst (Teil II) gezeigt werden, daß unter Benutzung eines Beweisgedankens, den I. Schur für Zahlenfolgen schon in seiner Arbeit [4] zur Vereinfachung seines ursprünglichen Beweises benutzt hat, sich eine entsprechende Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes bei ganzzahligem k auch für Funktionen gewinnen läßt. Bei Weiterbenutzung der in Äq. I eingeführten Bezeichnungen und vorbehaltlich einer genauen Charakterisierung der Vergleichsfunktionen $p(x)$ lautet dieser erweiterte Äquivalenzsatz:

---

[1]) Über eine Klasse konvergenzerhaltender Integraltransformationen und den Äquivalenzsatz der C- und H-Verfahren. Math. Zeitschr. 47 (1941), S. 229—264. Diese Arbeit wird im folgenden mit „Äq. I“ zitiert.

[2]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende von Äq. I.

[3]) Vgl. hierzu Äq. I, Fußnote 4.

Für eine zugelassene[4]) *Funktion* $s(t)$, *für ein bestimmtes* k *und eine bestimmte Vergleichsfunktion* $p(x)$ *streben bei* $x \to +\infty$[5]) *die Quotienten*

$$\frac{C_k(x; s(t))}{p(x)} \quad \text{und} \quad \frac{H_k(x; s(t))}{p(x)}$$

entweder beide gegen einen (endlichen) Grenzwert oder beide nicht. Im ersten Falle hängen die Grenzwerte selbst in einfacher Weise zusammen (s. u. (6. 3)*). Überdies lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen angeben, denen die Vergleichsfunktion* $p(x)$ *(innerhalb einer allgemeinen Funktionenklasse) genügen muß, damit der ausgesprochene Satz für jedes zugelassene* $s(t)$ *und jedes ganzzahlige* $k > 0$ *gültig ist.*

Die Ausdehnung dieses zunächst nur für ganzzahlige $k > 0$ bewiesenen Satzes auf nicht ganzzahlige $k > 0$[6]) ist wesentlich schwieriger und erfordert ganz andere Methoden. Sie sind in der Hauptsache von G. H. Hardy und M. Riesz beim Beweise des second theorem of consistency (für den Fall der Konvergenz der betrachteten Mittel) entwickelt worden[7]) und dienten schon M. Jacob [1] zum Beweise des gewöhnlichen Äquivalenzsatzes für Funktionen bei nicht-ganzer Ordnung $k > 0$. Mit ihnen gelingt es, den erweiterten Äquivalenzsatz für beliebige $k > 0$ zu beweisen (Teil IV), wodurch zugleich ein zweiter Beweis für den Fall ganzer k erhalten wird, für den sich in **29.** als Anwendung eines Hilfssatzes noch ein dritter und besonders durchsichtiger Beweis ergibt. Für $p(x) \equiv 1$ geht der Satz in den gewöhnlichen Äquivalenzsatz über.

Im I. Teil werden die für $x \geqq 0$ erklärten, komplexwertigen Funktionen $p(x)$ eingeführt, die als Vergleichsfunktionen für das asymptotische Verhalten unserer Mittel allein in Betracht kommen, und ihre für die Beweise des II. Teils (k ganzzahlig) erforderlichen Eigenschaften entwickelt. Es wird sich zeigen, daß eine stetige Funktion $p(x)$ dann und nur dann hierfür in Betracht kommt, wenn sie die beiden Eigenschaften

$$\text{(0. 1)} \qquad \frac{1}{x\,|p(x)|} \int_0^x |p(t)|\,dt \leqq M \quad \text{für alle } x > 0,$$

(M von x unabhängig),

[4]) D. h. eine (komplexwertige) Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$ (s. Äq. I, S. 238). Die Funktionen aus $\mathfrak{S}$ sind für $t > 0$ erklärt, für jedes $t_0 > 0$ in $0 < t \leqq t_0$ beschränkt und über $(0, t_0)$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

[5]) Die im folgenden vorkommenden Grenzprozesse beziehen sich, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt ist, stets auf x (bzw. t) $\to +\infty$.

[6]) Komplexe k werden im folgenden nicht in Betracht gezogen.

[7]) G. H. Hardy u. M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Tracts Nr. 18, Cambridge 1915, S. 30—33. — G. H. Hardy, The second theorem of consistency for summable series. Proc. London. math. Soc. (2) **15** (1915), S. 72—88.

und

$$\frac{1}{x\,p(x)}\int_0^x p(t)\,dt \to a \qquad \text{für } x \to +\infty \tag{0. 2}$$

besitzt. Auf Funktionen, die diese beiden Bedingungen erfüllen, ist man unter spezielleren Annahmen und teilweise in anderen Zusammenhängen schon mehrfach gestoßen: Rob. Schmidt[8]), der nur positive, monoton wachsende Zahlenfolgen in Betracht zog, nannte sie Vergleichsfolgen, I. Schur [3], [4], der komplexe Zahlenfolgen benutzte, nannte sie Mittelfolgen, in engem Anschluß an ihn nannte N. Obreschkoff [1] sie Mittelfunktionen, J. Karamata[9]), der positive Funktionen von x behandelte und sehr weitgehende Ergebnisse erzielte, regulär wachsende Funktionen. Im Anschluß an diesen letzten soll eine Funktion $p(x)$, die die Bedingungen (0. 1) und (0. 2) erfüllt (vgl. hierzu noch **1.**), regulär wachsend und a ihr Index heißen. Dabei ist „wachsend" im weiteren Sinne zu verstehen, denn unsere Funktionen brauchen, auch wenn sie reell sind, nicht monoton zu sein, und auch abnehmende Funktionen, wie $x^{-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1, x \geqq 1)$, sollen zu den regulär wachsenden gerechnet werden.

Für die Beweise des IV. Teils ist eine erheblich genauere Kenntnis dieser Funktionen erforderlich, als sie der sich an I. Schur anlehnende Teil I vermittelt. Sie wird im III. Teil gegeben, der sich mehr an die genannten Arbeiten von J. Karamata anschließt. Bei diesem werden aber, wie betont, nur positive Funktionen behandelt. Dadurch wird (0. 1) eine Folge von (0. 2), was an vielen Stellen eine Vereinfachung bedeutet. Andererseits setzt er seine Funktionen nur als integrierbar voraus, während wir uns mit Rücksicht auf den vorliegenden Anwendungszweck mit der Betrachtung stetiger Funktionen begnügen, was die Beweise erleichtert.

In einem kurzen Teil V wird schließlich noch gezeigt, daß auch die Abel-Laplaceschen Mittelbildungen [s. Äq. I, (3. 19) und § 7] in ähnlicher Weise an die Hölderschen und Cesároschen gekoppelt sind.

I. Regulär wachsende Funktionen.

1. Da die Funktionen $p(x)$ nur zum asymptotischen Vergleich mit anderen (meist stetigen) Funktionen für $x \to +\infty$ verwendet werden, dürfen wir sie für alle hinreichend großen x als stetig und von 0 verschieden voraussetzen. Und da es auf ihre Werte in einem beschränkten Intervall nicht ankommt, so wollen wir sogleich annehmen, daß sie für alle $x \geqq 0$ stetig und

[8]) Robert Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Math. Zeitschr. **22** (1925), S. 89—152.

[9]) J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière des fonctions. Mathematica **4** (1930), S. 38—53. — Sur un mode de croissance régulière. Bull. Soc. math. France **61** (1933), S. 55—62.

von 0 verschieden sind. *Die Klasse dieser (komplexwertigen) Funktionen werde mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.*

Eine für alle hinreichend großen x, etwa für $x \geqq \gamma$, stetige und von 0 verschiedene Funktion kann man sich in $0 \leqq x \leqq \gamma$ stets so abgeändert denken, daß sie zu $\mathfrak{P}$ gehört. Es genügt z. B., sie dort $\equiv p(\gamma)$ zu setzen.

Erklärung 1. *Eine Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$, die die Bedingungen* (0. 1) *und* (0. 2) *erfüllt, soll regulär wachsend und a ihr Index heißen*[10]).

Der Betrag einer Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ liegt in jedem beschränkten Intervall zwischen zwei festen positiven Schranken. *Eine Beziehung der Form* (0. 1) *ist daher in einem solchen Intervall von selbst erfüllt.* Wesentlich ist allein, daß diese Bedingung für alle großen x erfüllt ist.

Beispiele.

(1. 1) $p(x) = x^c$, $x \geqq 1$, $\Re(c) > -1$. Es ist $a = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c+1}$.

(1. 2) $p(x) = e^{c\,x}$, $x \geqq 0$, $\Re(c) \geqq 0$, $c \neq 0$. Es ist $a = 0$.

(1. 3) $p(x) = (\log x)^c = e^{c \log\log x}$, $x \geqq 3$, c beliebig. Es ist $a = 1$.

Im folgenden werden die Grundeigenschaften dieser Funktionen festgestellt. Dabei bedeutet $p(x)$ stets eine regulär wachsende Funktion mit dem Index a.

2. *Es gilt*

$$\int_0^x |p(t)|\,dt \to \infty \tag{2. 1}$$

und

$$x\,|p(x)| \to +\infty \text{ [5])}. \tag{2. 2}$$

Nach (0. 1) ist nämlich für $x \geqq \gamma > 0$

$$x\,|p(x)| \geqq \frac{1}{M}\int_0^{\gamma} |p(t)|\,dt = C > 0, \quad \text{also} \quad |p(x)| \geqq \frac{C}{x}.$$

Hieraus folgt (2. 1). Aus

$$x\,|p(x)| \geqq \frac{1}{M}\int_0^{x} |p(t)|\,dt$$

folgt nunmehr auch (2. 2).

3. *Strebt eine zugelassene Funktion* [4]) $\varepsilon(x) \to 0$ *und erfüllt ein $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ allein die Bedingung* (0. 1), *so strebt auch*

$$\eta(x) = \frac{1}{x\,p(x)}\int_0^x p(t)\,\varepsilon(t)\,dt \to 0. \tag{3. 1}$$

---

[10]) Der im Falle $a \neq 0$ oft auftretende reziproke Wert $\dfrac{1}{a}$ möge der *reziproke Index* genannt und mit b bezeichnet werden.

Beweis (vgl. Äq. I, § 3, Satz V). Ist $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $t > x_0$, so ist für $> x_0$

$$|\eta(x)| \leqq \frac{1}{x\,|p(x)|}\int_0^{x_0} |p(t)\,\varepsilon(t)|\,dt + \frac{\varepsilon}{x\,|p(x)|}\int_0^{x} |p(t)|\,dt$$

$$\leqq \frac{K}{x\,|p(x)|} + \varepsilon M\ ^{11}),$$

voraus nach (2. 2) die Behauptung folgt.

4. *Die mit einer Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ angesetzte Integraltransformation*

(4. 1) $$\frac{1}{x\,p(x)}\int_0^x p(t)\,s(t)\,dt$$

einer Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{Z}$ ist dann und nur dann konvergenzerhaltend, wenn $p(x)$ regulär wächst. Ist dies der Fall, so ist (4. 1) *multiplikativ [s. Äq. I, S. 241] mit dem Faktor a.*

Beweis. Daß die Bedingungen hinreichend sind, ist bekannt: Strebt $s(t) = s + \varepsilon(t) \to s$, also $\varepsilon(t) \to 0$, so strebt (4. 1), d. h.

$$s\,\frac{1}{x\,p(x)}\int_0^x p(t)\,dt + \frac{1}{x\,p(x)}\int_0^x p(t)\,\varepsilon(t)\,dt \to a\,s,$$

da der zweite Summand nach (0. 1) und **3.** gegen 0, der erste nach (0. 2) gegen $a\,s$ strebt. Daß (0. 1) notwendig ist, wurde in Übertragung der bekannten Toeplitzschen Bedingung bei Matrixtransformationen schon von L. L. Silverman und von T. Kojima [12]) bewiesen; und daß (0. 2) notwendig ist, ist trivial [es genügt, die Funktion $s(t) \equiv 1$ zu betrachten].

5. *Der Index a einer regulär wachsenden Funktion $p(x)$ hat stets einen nicht negativen Realteil: $\Re(a) \geqq 0$. Ist $\Re(\lambda) > 0$ und ist für $x \geqq \gamma \geqq 1$ die zu $\mathfrak{P}$ gehörige Funktion $p_1(x)$ gleich $x^\lambda p(x)$, so ist auch sie regulär wachsend und hat den Index*

(5. 1) $$a_1 = \frac{a}{1+\lambda a}.$$

---

[11]) Mit K wird hier und im folgenden eine von den jeweils veränderlichen Größen unabhängige Konstante bezeichnet. Sie darf bei jedem Auftreten einen anderen Wert haben.

[12]) L. L. Silverman, On the notion of summability for the limit of a function of a continuous variable. Trans. Amer. math. Soc. **17** (1916), S. 284—294. — T. Kojima, Theorems on convergent integrals. Tôhoku math. Journ. **14** (1918), S. 64—79. — Eine eingehende Behandlung der hierher gehörigen Fragen gab H. Raff, Lineare Transformationen beschränkter integrierbarer Funktionen. Math. Zeitschr. **41** (1936). S. 605—629.

Beweis. Für $x \geqq \gamma$ ist

$$\frac{1}{x|p_1(x)|}\int_0^x |p_1(t)|\,dt \leqq \frac{1}{|x^\lambda|\cdot x|p(x)|}\left\{\int_0^\gamma |p_1(t)|\,dt + |x^\lambda|\int_\gamma^x |p(t)|\,dt\right\}$$

$$\leqq M + \frac{1}{x|p(x)|}\int_0^\gamma |p_1(t)|\,dt.$$

Wegen (2. 2) und der Vorbemerkung in **1.** gibt es also eine Konstante M_1 so daß für alle $x > 0$

$$\frac{1}{x|p_1(x)|}\int_0^x |p_1(t)|\,dt \leqq M_1 \tag{5. 2}$$

ist. Die Bedingung (0. 1) ist erfüllt. Um (0. 2) zu prüfen, setzen wir

$$\int_0^x p(t)\,dt = P(x) = x\,p(x)\{a + \varepsilon(x)\}.$$

Dann gehört $\varepsilon(x)$ zu $\mathfrak{S}$, strebt $\to 0$ für $x \to \infty$, und es ist

$$\int_\gamma^x p_1(t)\,dt = \int_\gamma^x t^\lambda p(t)\,dt = x^\lambda P(x) - \gamma^\lambda P(\gamma) - \lambda\int_\gamma^x t^{\lambda-1}P(t)\,dt,$$

wegen (2. 2) also

$$\frac{1}{xp_1(x)}\int_\gamma^x p_1(t)\,dt = a - \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}p(x)}\int_\gamma^x t^\lambda\,p(t)\{a + \varepsilon(t)\}\,dt + o(1)$$

oder

$$\frac{1+\lambda a}{xp_1(x)}\int_\gamma^x p_1(t)\,dt = a - \frac{\lambda}{xp_1(x)}\int_\gamma^x p_1(t)\,\varepsilon(t)\,dt + o(1).$$

Wegen $\varepsilon(t) \to 0$ strebt nach (2. 2), (5. 2) und **3.** das mittlere Glied $\to 0$, und folglich

$$\frac{1+\lambda a}{xp_1(x)}\int_0^x p_1(t)\,dt \to a. \tag{5. 3}$$

Hiernach ist $1 + \lambda a \neq 0$. Denn andernfalls wäre auch $a = 0$, was zugleich mit $1 + \lambda a = 0$ nicht sein kann. Die Ungleichung $a \neq -\frac{1}{\lambda}$ bedeutet aber, da $-\frac{1}{\lambda}$ eine beliebige Zahl mit negativem Realteil sein kann, daß notwendig $\Re(a) \geqq 0$ sein muß. Aus (5. 3) folgt nun

$$\frac{1}{xp_1(x)}\int_0^x p_1(t)\,dt \to \frac{a}{1+\lambda a},$$

was die übrigen Behauptungen beweist.

Bemerkung. Wenn $p_1(x) = x^\lambda p(x)$ für alle $x \geqq 0$ gesetzt wird, o erfüllt $p_1(x)$ ebenfalls die Bedingungen (0. 1) und (0. 2). Denn es ist in $< x \leqq \gamma$, wenn dort $m_1 \leqq |p(x)| \leqq m_2$ ist,

$$\frac{1}{x\,|p_1(x)|}\int_0^x |p_1(t)|\,dt \leqq \frac{m_2}{m_1}.$$

Vir werden eine solche Funktion darum gelegentlich auch als regulär wachsend ezeichnen, obwohl $p_1(0) = 0$ ist.

II. Der erweiterte Äquivalenzsatz für ganzzahlige $k > 0$.

6. Wir setzen für ein bestimmtes zugelassenes $s(t)$ zur Abkürzung

$$C_k(x; s(t)) = c_k(x), \qquad H_k(x; s(t)) = h_k(x).$$

Dann lautet der in der Einleitung angedeutete Satz genauer:

Erweiterter Äquivalenzsatz. *Existiert für eine bestimmte regulär achsende Funktion $p(x)$ und ein bestimmtes ganzzahliges $k > 0$ der Grenzwert*

6. 1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{c_k(x)}{p(x)} = g_k,$$

o existiert auch der Grenzwert

6. 2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{h_k(x)}{p(x)} = g_k',$$

nd umgekehrt. Ist a der Index von $p(x)$, so ist dabei

6. 3) $$g_k' = \frac{(1+a)(1+2a)\cdots(1+\overline{k-1}\,a)}{2\cdot 3\cdots k}\, g_k$$ [13]).

Ist $p(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{P}$, so folgt aus der Existenz es einen der Grenzwerte (6. 1) *und* (6. 2) *dann und nur dann die des anderen ür jede zugelassene Funktion $s(t)$ und jedes ganzzahlige $k > 0$, wenn $p(x)$ egulär wächst.*

7. Wir zeigen zunächst: *Aus* (6. 1) *folgt* (6. 2). Da der Satz für $k = 1$ ivial ist, darf weiterhin $k \geqq 2$ angenommen werden. Nach Äq. I, (4. 3) ist un für ganzes $r \geqq 2$

$$MC_{r-1} = \left(\frac{1}{r}E + \frac{r-1}{r}M\right)C_r = T_r C_r,$$

enn

$$\frac{1}{r}E + \frac{r-1}{r}M = T_r$$

[13]) Nach **5.** ist der vor g_k stehende Faktor sicher von 0 verschieden.

gesetzt wird. Die Transformation (4. 1) bezeichnen wir mit M^*, ebenso ihre Vermittlungsfunktion $\frac{p(t)}{x\,p(x)}$, $(0 < t \leqq x)$. Entsprechend setzen wir

$$\frac{1}{r}E + \frac{r-1}{r}M^* = T_r^*.$$

Nach **4.** ist M^* wie M eine Integraltransformation der in Äq. I, § 3 beschriebenen Klasse $\mathfrak{B}$, während T_r und T_r^* nicht zu $\mathfrak{B}$ gehören; sie haben aber die dort S. 245 behandelte Form $\alpha E + \alpha' A$ mit A aus $\mathfrak{B}$. Es darf daher mit ihnen nach den dort entwickelten Regeln gerechnet werden (deren Gültigkeit man hier auch ganz unmittelbar einsieht).

Mit P bezeichnen wir endlich noch die Operation, die $s(t)$ in

$$P\big(x; s(t)\big) = p(x)\,s(x)$$

überführt. Zu ihr ist die Operation P^{-1}, die $s(t)$ in

$$P^{-1}\big(x; s(t)\big) = \frac{s(x)}{p(x)}$$

überführt, invers. Beide sind keine Integraltransformationen. Doch kann nun

$$M^* = P^{-1} M P, \qquad T_r^* = P^{-1} T_r P$$

geschrieben werden, und dies zeigt, daß, wie M und T_r, auch M^* und T_r^* miteinander vertauschbar sind.

Damit ist nun

$$M^*\Big(x; \frac{c_{r-1}(t)}{p(t)}\Big) = \frac{1}{p(x)} M\, C_{r-1} = \frac{1}{p(x)} T_r\, C_r = T_r^*\Big(x; \frac{c_r(t)}{p(t)}\Big),$$

wenn an den beiden mittleren Stellen $s(t)$ den angegebenen Transformationen unterworfen wird. Abgekürzt schreiben wir dafür

$$M^*\Big(\frac{c_{r-1}}{p}\Big) = T_r^*\Big(\frac{c_r}{p}\Big).$$

Für $r = 2$ liefert dies, da $c_1(x) \equiv h_1(x)$ und $\frac{h_2(x)}{p(x)} = M^*\big(\frac{h_1}{p}\big)$ ist,

$$\frac{h_2(x)}{p(x)} = M^*\Big(\frac{h_1}{p}\Big) = M^*\Big(\frac{c_1}{p}\Big) = T_2^*\Big(\frac{c_2}{p}\Big),$$

sodann für $r = 3$

$$\frac{h_3(x)}{p(x)} = M^*\Big(\frac{h_2}{p}\Big) = M^* T_2^*\Big(\frac{c_2}{p}\Big) = T_2^* M^*\Big(\frac{c_2}{p}\Big) = T_2^* T_3^*\Big(\frac{c_3}{p}\Big).$$

So fortschließend ergibt sich schließlich

$$\frac{h_k(x)}{p(x)} = T_2^* T_3^* \ldots T_k^*\Big(x; \frac{c_k(t)}{p(t)}\Big). \tag{7. 1}$$

ach **4.** ist nun T_r^*, $(r = 2, 3, \ldots)$, multiplikativ mit dem Faktor $\frac{1+(r-1)a}{r}$.
us (6. 1) folgt daher nach (7. 1) unmittelbar, daß

$$\frac{h_k(x)}{p(x)} \to \frac{1+a}{2} \cdot \frac{1+2a}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1+(k-1)a}{k} g_k = g_k'$$

rebt. Damit ist die erste Hälfte des Äquivalenzsatzes bewiesen.

Soll dieser Teil des Satzes bei beliebigem $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ für jedes $k = 2, 3, \ldots$ nd jede zugelassene Funktion $s(t)$ gelten, so insbesondere für $k = 2$. Dies fordert, daß T_2^*, also auch M^* konvergenzerhaltend ist. Das ist aber nach **4.** nn und nur dann der Fall, wenn $p(x)$ regulär wächst.

8. *Aus* (6. 2) *folgt* (6. 1). Nach Äq. I, (4. 7) und (4. 10) besitzt T_r die verse

$$T_r^{-1} = r E - (r-1) N_{r-1},$$

enn [vgl. Äq. I, (4. 8)] N_{r-1} die Transformation mit der Vermittlungs-nktion $r\frac{t^{r-1}}{x^r}$, $(0 < t \leqq x)$, bedeutet. Also besitzt T_r^* die Inverse

$$T_r^{*-1} = P^{-1} T_r^{-1} P = r E - (r-1) N_{r-1}^*,$$

enn $N_{r-1}^* = P^{-1} N_{r-1} P$ die Transformation mit der Vermittlungsfunktion

$$N_{r-1}^* = r \frac{t^{r-1} p(t)}{x^r p(x)}$$

deutet. Sie gehört wieder zu $\mathfrak{P}$, da $x^{r-1} p(x)$ nach **5.** und der zusätz-hen Bemerkung in **5.** zugleich mit $p(x)$ regulär wächst.

Aus (7. 1) folgt daher

. 1) $$\frac{c_k(x)}{p(x)} = T_k^{*-1} \cdot \ldots \cdot T_2^{*-1}\left(x; \frac{h_k(t)}{p(t)}\right).$$

a $t^{r-1} p(t)$, $(r = 2, 3, \ldots)$, nach **5.** überdies den Index $\frac{a}{1+(r-1)a}$ hat, so N_{r-1}^* konvergenzerhaltend mit diesem Index als Multiplikator. Also ist ch T_r^{*-1} multiplikativ mit dem Faktor

$$r - (r-1)\frac{ra}{1+(r-1)a} = \frac{r}{1+(r-1)a}.$$

us (6. 2) folgt daher auf Grund von (8. 1) die Beziehung (6. 1) mit

$$g_k = \frac{k}{1+(k-1)a} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{1+a} g_k'.$$

amit ist auch die zweite Hälfte des Äquivalenzsatzes bewiesen. Damit sie demselben Sinne wie die erste stets gilt, ist notwendig und hinreichend, ß $x^{r-1} p(x)$, $(r = 2, 3, \ldots, k)$, regulär wächst, für beide Hälften zusammen so, daß $p(x)$ regulär wächst.

III. Weitere Eigenschaften der regulär wachsenden Funktionen.

9. *Erfüllt ein* $p(x)$ *aus* $\mathfrak{P}$ *die Bedingung* (0. 2) *und ist* $a \neq 0$ [14]), *so gibt es eine Funktion* $b(x)$, *die für ein* $\gamma > 0$ *in* $x \geqq \gamma$ *stetig und* $\neq 0$ *ist, für die*

$$b(x) \to b = \frac{1}{a} \neq 0 \text{ [10])}$$

gilt und mit der bei geeignetem $C \neq 0$ *in* $x \geqq \gamma$

$$p(x) = C \cdot \frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt \tag{9. 1}$$

ist.

Beweis. $\int_0^x p(t)\, dt = \varphi(x)$ ist für $x > 0$ stetig differenzierbar, und es ist $\varphi'(x) = p(x) \neq 0$. Wegen $\frac{\varphi(x)}{x\,\varphi'(x)} \to a \neq 0$ gibt es ein $\gamma > 0$, so daß $\varphi(x) \neq 0$ ist in $x \geqq \gamma$. Dann leistet die Funktion

$$b(x) = \frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} \qquad (x \geqq \gamma)$$

das Verlangte. Denn $b(x)$ ist in $x \geqq \gamma$ stetig und $\neq 0$ und strebt für $x \to \infty$ gegen $b = \frac{1}{a} \neq 0$. Mit ihr ist ferner

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{b(x)}{x}, \qquad [\log \varphi(t)]_{\gamma}^{x} = \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt,$$

also

$$\varphi(x) = \int_0^x p(t)\, dt = C \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt, \qquad \left(C = \int_0^{\gamma} p(t)\, dt = \varphi(\gamma) \neq 0\right),$$

und

$$p(x) = \varphi'(x) = \frac{b(x)}{x}\, \varphi(x) = C\, \frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\, dt, \qquad (x \geqq \gamma).$$

Die Darstellung (9. 1), die insbesondere für jede regulär wachsende Funktion mit von 0 verschiedenem Index möglich ist, wollen wir deren *kanonische Darstellung* nennen.

Setzt man in ihr $b(x) = b + \varepsilon(x)$, $\frac{b(x)}{b} = c(x)$, $\frac{b\,C}{\gamma^b} = C'$, so kann ihr die Form

$$p(x) = C'\, c(x)\, x^{b-1} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt, \qquad (x \geqq \gamma), \tag{9. 2}$$

[14]) Die regulär wachsenden Funktionen mit dem Index $a = 0$ unterscheiden sich in wesentlichen Eigenschaften von denen mit $a \neq 0$ und werden im folgenden meist beiseite gelassen.

geben werden[15]), in der $c(x)$ und $\varepsilon(x)$ für $x \geqq \gamma$ stetig sind, $c(x) \neq 0$ ist d $c(x) \to 1$, $\varepsilon(x) \to 0$ strebt.

10. Auf Grund von **9.** läßt sich das eine der Ergebnisse in **5.** erneut und rschärft beweisen: *Der Index a einer regulär wachsenden Funktion ist entder $= 0$ oder er hat einen positiven Realteil*: $\Re(a) > 0$.

Beweis. In (0.1) setzen wir $\int_0^x |p(t)|\,dt = \psi(x)$, $\frac{1}{M} = \mu$, so daß für e $x \geqq 1$

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \geqq \frac{\mu}{x}, \qquad \psi(x) \geqq \psi(1)\, x^{\mu},$$

0.1) $$|p(x)| = \psi'(x) \geqq \frac{\mu}{x}\,\psi(x) > \frac{c_1}{x}\,x^{\mu}$$

($c_1 > 0$ und von x unabhängig). Wäre nun $a \neq 0$ und $\Re(a) \leqq 0$, also ch $\Re(b) \leqq 0$, so wäre für $x > x_1 \geqq \gamma$

$$\Re(b(x)) = \beta(x) < \frac{\mu}{2},$$

ch (9.1) also für $x > x_1$

$$p(x) < |C|\,\frac{|b(x)|}{x} \exp \int_{\gamma}^{x_1} \frac{\beta(t)}{t}\,dt \cdot \exp\left\{\frac{\mu}{2}\int_{x_1}^{x} \frac{dt}{t}\right\}$$

$$< \frac{c_2}{x}\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\frac{\mu}{2}}, \qquad (c_2 > 0 \text{ von } x \text{ unabhängig}),$$

s für alle hinreichend großen x mit (10.1) in Widerspruch steht. Also ist $a) > 0$, $\Re(b) > 0$.

11. (Umkehrung von **9.**) *Es sei $b(x)$ in $x > \gamma' \geqq 0$ stetig und für $x \to \infty$ ebe $b(x) \to b$ mit $\Re(b) > 0$. Dann ist bei geeignetem $\gamma > \gamma'$ und beliebigem $\neq 0$ die Funktion*

.1) $$p(x) = C\,\frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t}\,dt, \qquad (x \geqq \gamma),$$

man sich in $0 \leqq x \leqq \gamma$ beliebig gemäß **1.** *erklärt denken möge, regulär chsend mit dem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$.*

Beweis. I. Es werde $\Re(b(x)) = \beta(x)$, $\Re(b) = \beta$ gesetzt. Dann strebt $x) \to \beta > 0$, und es kann $\gamma > \gamma'$ so gewählt werden, daß $\beta(x) > 0$ ist $x \geqq \gamma$. Wird dies γ in (11.1) verwendet, so ist das dadurch erklärte $p(x)$

[15]) Potenzen mit positiver Grundzahl und komplexen Exponenten sind wie üblich deutig erklärt.

in $x \geqq \gamma$ stetig und $\neq 0$, gehört also, wenn in $0 \leqq x \leqq \gamma$ irgendwie gemäß
erklärt, jedenfalls zur Klasse $\mathfrak{P}$. Weiter ist für $x \geqq \gamma$

$$\int_\gamma^x p(t)\,dt = C\int_\gamma^x \frac{b(t)}{t}\exp\left\{\int_\gamma^t \frac{b(u)}{u}\,du\right\}dt$$

$$= C\left[\exp\int_\gamma^t \frac{b(u)}{u}\,du\right]_\gamma^x = C\exp\int_\gamma^x \frac{b(t)}{t}\,dt - C.$$

Hiernach ist für $x \geqq \gamma$

$$\frac{1}{x\,p(x)}\int_\gamma^x p(t)\,dt = \frac{1}{b(x)} - \frac{C}{x\,p(x)} \tag{11.2}$$

und strebt also $\to \frac{1}{b}$, da $x|p(x)|$ offenbar gegen $+\infty$ strebt.

II. Wir setzen nun für $x \geqq \gamma$

$$q(x) = \frac{\beta(x)}{x}\exp\int_\gamma^x \frac{\beta(t)}{t}\,dt$$

und $q(x) \equiv q(\gamma)$ in $0 \leqq x \leqq \gamma$. Dann ist einerseits

$$|p(x)| = |C|\,\frac{|b(x)|}{\beta(x)}\,q(x),$$

so daß

$$\chi(x) = \frac{|p(x)|}{q(x)} \to |C|\,\frac{|b|}{\beta} = d > 0 \tag{11.3}$$

strebt. Andererseits strebt, nach I, da $\beta(x)$ die entsprechenden Voraus
setzungen erfüllt wie $b(x)$,

$$\frac{1}{x\,q(x)}\int_\gamma^x q(t)\,dt \to \frac{1}{\beta}.$$

Mit $x|p(x)|$ strebt nach (11.3) auch $x\,q(x) \to \infty$ und also auch

$$\frac{1}{x\,q(x)}\int_0^x q(t)\,dt \to \frac{1}{\beta}.$$

Da $q(x) > 0$ und also die Bedingung (0.1) für $q(x)$ eine Folge von (0.2) ist
so ist $q(x)$ regulär wachsend mit dem Index $\frac{1}{\beta}$. Folglich strebt nach (2.2), 4
und (11.3)

$$\frac{1}{x\,q(x)}\int_\gamma^x q(t)\,\chi(t)\,dt \to \frac{d}{\beta}$$

nd also

$$\frac{1}{x\,|p(x)|}\int_{\gamma}^{x}|p(t)|\,dt \to \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\Re\left(\frac{1}{a}\right)}. \tag{11.4}$$

Wegen $x|p(x)| \to \infty$ ergibt sich aus (11. 4), daß (0. 1) erfüllt ist, und aus 11. 2), daß (0. 2) erfüllt ist. — Darüber hinaus haben sich die beiden folgenden Tatsachen ergeben:

12. 1. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit einem Index $a \neq 0$, so ist auch $p(x)|$ regulär wachsend und hat den Index $\frac{1}{\Re\left(\frac{1}{a}\right)}$.* Denn in der kanonischen Darstellung (9. 1) von $p(x)$ erfüllt $b(x)$ nach **10.** die Voraussetzungen von **11.** Es gilt also (11. 4), und zwar auch dann, wenn dort die untere Integrationsgrenze γ durch 0 ersetzt wird.

2. *Erfüllt eine Funktion $p(x)$ aus $\mathfrak{P}$ allein die Bedingung* (0. 2) *und ist in ihr $\Re(a) > 0$, so ist auch* (0. 1) *erfüllt und $p(x)$ also regulär wachsend mit dem Index a.* Denn $p(x)$ besitzt dann eine Darstellung (9. 1) und ist also nach **11.** regulär wachsend mit dem Index a.

13. 1. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index a und ihr die Funktion $p_1(x)$ aus $\mathfrak{P}$ asymptotisch proportional: $p_1(x) \simeq g \cdot p(x)$, $(g \neq 0)$, so ist auch $p_1(x)$ regulär wachsend mit dem Index a.* Denn setzt man $p_1(x) = (g + \varepsilon(x))\ p(x)$, so erkennt man nach **3.** sofort, daß auch

$$\frac{1}{x\,p_1(x)}\int_{0}^{x} p_1(t)\,dt \to a$$

strebt. Weiter ist

$$\frac{1}{x\,|p_1(x)|}\int_{0}^{x}|p_1(t)|\,dt \leqq \frac{1}{x\,|p_1(x)|}\left\{g\int_{0}^{x}|p(t)|\,dt + \int_{0}^{x}|\varepsilon(t)\,p(t)|\,dt\right\}$$

und bleibt also für alle $x > 0$ unter einer festen Schranke M_1.

Hieraus folgt noch:

2. *Jede Funktion aus $\mathfrak{P}$, der für $x \geqq \gamma$ die Form* (9. 2) *gegeben werden kann, ist regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b}$, falls $\Re(b) > 0$ ist und $c(x)$ und $\varepsilon(x)$ die dort genannten Bedingungen erfüllen.* Denn für $x \geqq \gamma$ kann dann

$$p(x) = C \cdot \frac{b \cdot c(x)}{x}\ \exp\int_{\gamma}^{x}\frac{b+\varepsilon(t)}{t}\,dt$$

gesetzt werden. Mit $b + \varepsilon(t) = b(t)$ ist sie also der (nach **11.**) regulär wachsenden Funktion

$$C \frac{b(x)}{x} \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{b(t)}{t} dt$$

asymptotisch gleich und also selbst regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b}$.

14. Auch das zweite Ergebnis in **5.** ergibt sich jetzt im Falle $a \neq 0$ aus der kanonischen Darstellung. Denn ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a \neq 0$ und also für $x \geqq \gamma$ von der Form (9. 2), so hat $p_1(x) = x^\lambda p(x)$ für $x \geqq \gamma$ die gleiche Form, nur daß der Exponent $\frac{1}{a} - 1$ durch $\frac{1}{a} + \lambda - 1 = \frac{1+\lambda a}{a} - 1$ ersetzt ist. Daraus ergibt sich die Behauptung, und zwar in der erweiterten Form:

Zusatz. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a \neq 0$, so ist auch jede Funktion $p_1(x)$ aus $\mathfrak{P}$ regulär wachsend, die für alle hinreichend großen x mit $x^\lambda p(x)$ übereinstimmt, wofern nur $\Re(\lambda) > -\Re\left(\frac{1}{a}\right)$ ist. Der Index von $p_1(x)$ ist dann $a_1 = \frac{a}{1+\lambda a}$.*

15. *Ist $p(x)$ regulär wachsend und $a = \frac{1}{b} \neq 0$, so strebt bei jedem festen $\tau > 0$*

$$\frac{p(\tau x)}{p(x)} \to \tau^{b-1}. \tag{15. 1}$$

Beweis. Nach (9. 2) ist für $x > \mathrm{Max}\left(\gamma, \frac{\gamma}{\tau}\right)$

$$\frac{p(\tau x)}{p(x)} = \frac{c(\tau x)}{c(x)} \cdot \tau^{b-1} \cdot \exp \int_{x}^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt.$$

Rechts strebt der erste Faktor $\to 1$; ebenso der letzte, denn nach Wahl von $\varepsilon > 0$ kann x_0 so bestimmt werden, daß für $x > x_0$ im Intervall $\langle x, \tau x \rangle$ stets $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$, also

$$\left| \int_{x}^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right| < \varepsilon |\log \tau|$$

ist. Also gilt (15. 1) [16].

---

[16]) J. KARAMATA nimmt in der zweiten der in Fußnote [9]) genannten Arbeiten die Eigenschaft (15. 1) zum Ausgangspunkt für die Behandlung seiner (positiven) regulär wachsenden Funktionen. Genauer: Er nennt eine (positive) Funktion $p(x)$ regulär wachsend, wenn bei festem $\tau > 0$ stets $p(\tau x)/p(x)$ für $x \to \infty$ einem Grenzwert, etwa $h(\tau)$, zustrebt. Es zeigt sich dann, daß $h(\tau)$ notwendig $= \tau^\varkappa$, ($\varkappa$ reell), sein muß und daß seine regulär wachsenden Funktionen für $\varkappa > -1$ auch in unserem Sinne regulär wachsend sind.

Dies Ergebnis, wie auch schon die kanonische Darstellung (9. 2), zeigt, aß die regulär wachsenden Funktionen vom Index 1 besonders ausgezeichnet nd. Wir definieren:

Erklärung 2. *Eine regulär wachsende Funktion vom Index* 1 *soll eine ngsam wachsende Funktion heißen* [R. Schmidt [8]), J. Karamata [9])]. Sie wird der Folge meist mit $L(x)$ bezeichnet. Für sie strebt bei festem $\tau > 0$ stets

5. 2) $$\frac{L(\tau x)}{L(x)} \to 1.$$

mgekehrt ist auch jede Funktion der Klasse $\mathfrak{P}$, die die Eigenschaft (15. 2) at, langsam wachsend mit dem Index 1. Von dieser Tatsache werden wir dessen keinen Gebrauch machen. Ein Beweis findet sich für positive Funkonen bei J. Karamata [9]).

Aus der Erklärung 2, (9. 2) und **13.** 2. folgt unmittelbar:

16. *Eine Funktion der Klasse* $\mathfrak{P}$ *ist dann und nur dann langsam wachsend, enn sie für ein* $\gamma > 0$ *in* $x \geqq \gamma$ *auf die Form*

6. 1) $$L(x) = C(x) \cdot \exp \int_{\gamma}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt$$

ebracht werden kann mit stetigem $C(x) \neq 0$, $C(x) \to C \neq 0$ *und stetigem* $(x) \to 0$. Sowie:

17. *Eine Funktion* $p(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{P}$ *ist dann und nur dann regulär achsend vom Index* $a \neq 0$, *wenn* $\Re(a) > 0$ *ist und die Funktion für alle inreichend großen* x *mit* $b = \frac{1}{a}$ *auf die Form*

7. 1) $$p(x) = x^{b-1} L(x)$$

it langsam wachsendem $L(x)$ *gebracht werden kann.*

18. *Ist* $L(x)$ *langsam wachsend und* $\varepsilon > 0$, *so ist für alle hinreichend roßen* x

8. 1) $$x^{-\varepsilon} < |L(x)| < x^{\varepsilon}.$$

Beweis. $L(x)$ werde auf die Form (16. 1) gebracht. Für $t > x_0 \geqq \gamma$ ei $|\varepsilon(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist für $x > x_0$

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{x}{x_0}.$$

ieraus folgt aber, da $|C(x)|$ für alle hinreichend großen x zwischen festen ositiven Schranken bleibt, sofort die Behauptung. Aus ihr folgt in Erinzung zu (2. 2) insbesondere noch:

Hat $p(x)$ einen von 0 verschiedenen Index, so strebt auch für jedes reelle $\varrho > 0$

$$x\,|p(x)|\,(\log x)^{-\varrho} \to \infty. \tag{18.2}$$

19. *Die Beziehungen* (15.1) *und* (15.2) *gelten gleichmäßig für alle τ eines Intervalles der Form $0 < \tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$.*

Beweis. Wegen (17.1) genügt es, dies für (15.2) zu beweisen. Nach (16.1) ist

$$\frac{L(\tau x)}{L(x)} = \frac{C(\tau x)}{C(x)} \cdot \exp \int_x^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt.$$

Wegen $C(x) \to C \neq 0$ strebt $\frac{C(\tau x)}{C(x)} \to 1$ gleichmäßig in $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$, und wegen

$$\left| \int_x^{\tau x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt \right| \leqq \varepsilon \cdot \operatorname{Max}\{|\log \tau_1|, |\log \tau_2|\}$$

(vgl. den Beweis in **15.**) tut es auch der Exponentialfaktor.

20. *Es sei $q(x)$ eine positive regulär wachsende Funktion mit einem Index $0 < \alpha = \frac{1}{\beta} < 1$ (so daß $q(x)$ nach* (17.1) *und* (18.1) *gegen ∞ strebt) und*

$$Q(x) = \operatorname{Max}\{q(t)\} \quad \text{in} \quad 0 \leqq t \leqq x.$$

Dann strebt $Q(x)/q(x) \to 1$, so daß die monoton wachsende und stetige Funktion $Q(x)$ nach **13.1.** *wiederum regulär wächst und den Index α hat*[17]).

Beweis. Es ist $Q(x) = q(\vartheta_x x)$ mit $0 \leqq \vartheta_x \leqq 1$. Bringt man nun $q(x)$ auf die Form (9.2), so ist

$$\frac{Q(x)}{q(x)} = \frac{q(\vartheta_x x)}{q(x)} = \frac{c(\vartheta_x x)}{c(x)} \cdot \vartheta_x^{\beta-1} \cdot \exp \int_x^{\vartheta_x x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt. \tag{20.1}$$

Da wegen $q(x) \to \infty$ auch $\vartheta_x x \to \infty$ streben muß, hat der erste Faktor rechts den Grenzwert 1. Es genügt also zu zeigen, daß $\vartheta_x \to 1$ strebt. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine gegen $+\infty$ strebende Folge x_ν, für die $\vartheta_{x_\nu} \to \vartheta < 1$ strebt. Für diese würde nach (20.1) $Q(x_\nu)/q(x_\nu) \to \vartheta^{\beta-1}$ streben[18]). Das ist jedoch unmöglich, da $Q(x) \geqq q(x)$ ist und $\vartheta^{\beta-1} < 1$

[17]) J. KARAMATA, S. 45 der ersten in Fußnote [9]) genannten Arbeiten. Der dortige Beweis benutzt die bei ihm nicht vorausgesetzte Stetigkeit von $q(x)$.

[18]) Dies gilt auch, wenn $\vartheta = 0$ sein sollte. Denn ist $0 < \varepsilon < \beta - 1$, so ist für alle hinreichend großen x

$$\vartheta_x^{\beta-1} \cdot \exp \int_x^{\vartheta_x x} \frac{\varepsilon(t)}{t}\, dt < \vartheta_x^{\beta-1-\varepsilon}.$$

wäre. (Für $\beta = 1$ gilt, wie J. Karamata a. a. O. durch ein Beispiel zeigt, der Satz nicht mehr allgemein.) — Analog gilt:

Es sei $q(x)$ eine positive regulär wachsende Funktion mit dem Index $\alpha = \frac{1}{\beta} > 1$ (so daß $q(x) \to 0$ strebt) und

$$\overline{Q}(x) = \operatorname{Max}\{q(t)\} \quad \text{in} \quad t \geqq x.$$

Dann ist auch $\overline{Q}(x) \asymp q(x)$, regulär wachsend mit dem Index α und monoton fallend.

Beweis. Jetzt ist $\overline{Q}(x) = q(\vartheta_x x)$ mit $\vartheta_x \geqq 1$. Würde $\vartheta_x \to 1$ nicht gelten, so gäbe es eine Folge $x_\nu \to \infty$, für die $\vartheta_{x_\nu} \to \vartheta > 1$ strebt. Für sie würde $\overline{Q}(x_\nu)/q(x_\nu) \to \vartheta^{\beta-1}$ streben, was unmöglich, weil wieder die linke Seite $\geqq 1$, die rechte < 1 ist.

21. *Es sei $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a \neq 0$. Es werde $\frac{1}{a} = b$, $\Re(b) = \beta$ gesetzt. Die Funktion $f(t)$ sei in $0 < t < \tau$ erklärt und über $(0, \tau)$ absolut integrierbar. Gilt dann für ein $\delta < 1$ mit $0 < \delta < \tau$ in $0 < t \leqq \delta$ eine Ungleichung der Form $|f(t)| < Kt^\varkappa$ mit $\varkappa > -\beta$ und > -1, so ist*

$$\int_0^\tau f(t)\, p(xt)\, dt \asymp p(x) \int_0^\tau f(t)\, t^{b-1}\, dt.$$

Beweis. Für $0 < \varepsilon < \delta$ und $x > 0$ ist

$$\left| \int_0^\varepsilon f(t)\, p(xt)\, dt \right| < K \int_0^\varepsilon t^\varkappa\, |p(xt)|\, dt = \frac{K}{x^{\varkappa+1}} \int_0^{\varepsilon x} t^\varkappa\, |p(t)|\, dt.$$

Es sei $p_1(t)$ eine Funktion aus $\mathfrak{P}$, die für $t \geqq 1$ mit $t^\varkappa p(t)$ übereinstimmt. Mit ihr ist für $x > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\left| \frac{1}{p(x)} \int_0^\varepsilon f(t)\, p(xt)\, dt \right|$$

$$< \frac{K}{x\,|p_1(x)|} \int_0^1 t^\varkappa\, |p(t)|\, dt + K \left| \frac{p(\varepsilon x)}{p(x)} \right| \varepsilon^{\varkappa+1} \cdot \frac{1}{(\varepsilon x)\,|p_1(\varepsilon x)|} \int_0^{\varepsilon x} |p_1(t)|\, dt.$$

Da nach dem Zusatz zu **14.** $p_1(x)$ regulär wächst, so ist dies bei passender Wahl von M_1

$$< \frac{K'}{x\,|p_1(x)|} + K M_1\, \varepsilon^{\varkappa+1} \cdot \left| \frac{p(\varepsilon x)}{p(x)} \right|.$$

Für $x \to \infty$ strebt diese Summe nach (2. 2) und (15. 1) gegen $K M_1\, \varepsilon^{\varkappa+\beta}$ und ist also für alle $x > x_1(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$

$$< 2\, K M_1\, \varepsilon^{\varkappa+\beta}.$$

Da nun

$$\left| \int_0^\varepsilon f(t)\, t^{b-1}\, dt \right| < K \int_0^\varepsilon t^{\varkappa+\beta-1}\, dt = \frac{K}{\varkappa+\beta}\, \varepsilon^{\varkappa+\beta}$$

ist, so ist

$$\frac{1}{p(x)} \int_0^\tau f(t)\, p(xt)\, dt - \int_0^\tau f(t)\, t^{b-1}\, dt = \int_\varepsilon^\tau f(t) \left[\frac{p(xt)}{p(x)} - t^{b-1} \right] dt + \eta(x)$$

mit

$$|\eta(x)| < K \left(2M_1 + \frac{1}{\varkappa+\beta} \right) \varepsilon^{\varkappa+\beta}.$$

Nach **19.** strebt der Wert der eckigen Klammer in $\varepsilon \leqq t \leqq \tau$ gleichmäßig $\to 0$, ist also seinem Betrage nach $< \varepsilon^{\varkappa+\beta}$ für alle $x > x_2(\varepsilon)$ und alle t in $\varepsilon \leqq t \leqq \tau$. Für $x > x_0 = \mathrm{Max}\,(x_1, x_2)$ ist also

$$\left| \frac{1}{p(x)} \int_0^\tau f(t)\, p(xt)\, dt - \int_0^\tau f(t)\, t^{b-1}\, dt \right| \leqq \left\{ \int_0^\tau |f(t)|\, dt + 2KM_1 + \frac{K}{\varkappa+\beta} \right\} \varepsilon^{\varkappa+\beta},$$

was die Behauptung beweist.

Schließlich bringen wir noch einige später gebrauchte Hilfssätze über die $p(x)$ im Zusammenhang mit ihren C- und H-Transformationen. Hierbei wollen wir verabreden, daß wir die durch eine Transformation V aus einem zugelassenen $s(t)$ gewonnene Funktion $V(x; s(t))$ kurz mit $V(x)$ bezeichnen, wenn über die Funktion $s(t)$, die transformiert wurde, auf Grund des Zusammenhanges kein Zweifel möglich ist.

22. *Ist die Funktion $p(t)$ regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$, so gelten für ihre S_k-, C_k- und H_k-Transformationen bei $k > 0$* [vgl. Äq. I, (1. 5) und (3. 18); in letzterer ist noch $(k-1)!$ durch $\Gamma(k)$ zu ersetzen] *die Beziehungen*

$$(22.\,1) \qquad S_k(x; p(t)) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^x (x-t)^{k-1}\, p(t)\, dt \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\, x^k\, p(x),$$

$$(22.\,2) \qquad C_k(x; p(t)) = \frac{k}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1} p(t)\, dt \simeq \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\, p(x),$$

$$(22.\,3) \qquad H_k(x; p(t)) = \frac{1}{\Gamma(k)\, x} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} p(t)\, dt \simeq a^k\, p(x).$$

Beweis. Es ist zunächst

$$S_k(x; p(t)) = \frac{x^k}{\Gamma(k)} \int_0^1 (1-t)^{k-1}\, p(xt)\, dt.$$

Da die Funktion $f(t) = (1-t)^{k-1}$ in $(0 \ldots 1)$ offenbar die in **21.** gemachten Voraussetzungen erfüllt (etwa mit $\varkappa = 0$), so ist dies weiter

$$\cong \frac{1}{\Gamma(k)} x^k \, p(x) \cdot \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{b-1} \, dt = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)} x^k \, p(x),$$

was die erste Behauptung beweist. Die zweite ergibt sich hieraus durch Division mit $x^k/\Gamma(k+1)$.

Ganz entsprechend hat man

$$H_k(x; p(t)) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-1} p(xt) \, dt,$$

und da jetzt die Funktion $f(t) = \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-1}$ in $(0 \ldots 1)$ die in **21.** gemachten Voraussetzungen erfüllt, wenn $\varkappa$ negativ (aber $> -\beta$, > -1) gewählt wird, so ist dies nach **21.** weiter

$$\cong \frac{1}{\Gamma(k)} p(x) \cdot \int_0^1 \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-1} t^{b-1} \, dt.$$

Das neue Integral ist aber

$$= \int_0^\infty e^{-bt} t^{k-1} \, dt = \frac{1}{b^k} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} \, dt,$$

wenn bei dem letzten Integral der Weg geradlinig von 0 über b nach ∞ genommen und für t^k (und b^k) der Hauptwert gewählt wird. Es hat also den Wert $\Gamma(k)$, was den Beweis vollendet.

Etwas allgemeiner gilt:

23. *Ist* $s(t) \cong g \cdot p(t)$ *für* $t \to \infty$, $(s(t)$ *aus* $\mathfrak{S})$, *und* $k > 0$, *so gilt für* $x \to \infty$

23. 1) $$S_k(x; s(t)) \cong \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)} g \cdot x^k \, p(x),$$

23. 2) $$C_k(x; s(t)) \cong \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)} g \cdot p(x),$$

23. 3) $$H_k(x; s(t)) \cong a^k g \cdot p(x).$$

[Im Falle $g = 0$ ist die rechte Seite von Voraussetzung und Behauptung durch $o(p(t))$ bzw. $o(x^k p(x))$ und $o(p(x))$ zu ersetzen.]

Beweis. Wird $s(t) = (g + \varepsilon(t)) \, p(t)$ gesetzt, so gehört $\varepsilon(t)$ zu $\mathfrak{S}$ und strebt $\to 0$ für $t \to \infty$. Wegen des linearen Charakters der Transformationen ist nun

$$S_k(x; s(t)) = g \cdot S_k(x; p(t)) + S_k(x; \varepsilon(t) \, p(t)),$$

und entsprechendes gilt für die C_k- und H_k-Transformation. Auf Grund von **22.** genügt es daher zu zeigen, daß der zweite Summand rechts $= o(x^k p(x))$ und im Falle der C_k- und H_k-Transformation $= o(p(x))$ ist. Das ergibt sich aber wie üblich[19]): Man bestimmt bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ein x_0 so, daß $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $t \geqq x_0$. Dann ist für $x > x_0$

$$x^k \frac{1}{p(x)} \int_0^x (x-t)^{k-1} \varepsilon(t)\, p(t)\, dt$$

$$\leqq \frac{1}{x^k |p(x)|} \left| \int_0^{x_0} (x-t)^{k-1} \varepsilon(t)\, p(t)\, dt \right| + \frac{\varepsilon}{x^k |p(x)|} \int_0^x (x-t)^{k-1} |p(t)|\, dt.$$

Hier ist der erste Summand rechts

$$< \frac{K}{x |p(x)|} \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1}$$

und ist also wegen $x\,|p(x)| \to \infty$ für alle hinreichend großen x kleiner als ε. Der zweite Summand strebt, weil nach **12.** 1. auch $|p(t)|$ regulär wächst, nach (22. 1) gegen einen Grenzwert der Form $\varepsilon \cdot c$, ist also für alle hinreichend großen x kleiner als ein festes Vielfaches von ε. Das gilt also auch für den ganzen Ausdruck. Die linke Seite strebt daher $\to 0$, d. h. es ist $S_k(x; \varepsilon(t)\, p(t)) = o(x^k p(x))$. Für C_k ergibt sich die entsprechende Behauptung durch Division mit x^k.

Daß auch die H_k-Transformation von $\varepsilon(t)\, p(t)$ gleich $o(p(x))$, folgt aus der analog wie oben angesetzten Abschätzung

$$(23.\ 4) \qquad \left| \frac{1}{x\, p(x)} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} \varepsilon(t)\, p(t)\, dt \right|$$

$$\leqq \frac{1}{x\, |p(x)|} \int_0^{x_0} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} |\varepsilon(t)\, p(t)|\, dt + \frac{\varepsilon}{x\, |p(x)|} \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} |p(t)|\, dt,$$

und zwar für den zweiten Summanden auf Grund von (22. 3), für den ersten folgendermaßen: Es ist

$$\int_0^{x_0} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} |\varepsilon(t)\, p(t)|\, dt \leqq K \int_0^{x_0} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} dt = O(\log^{k-1} x),$$

[19]) Das Folgende besagt kurz: Die Integraltransformationen mit den Vermittlungsfunktionen $\frac{p(t)}{x\, p(x)} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{k-1}$ und $\frac{p(t)}{x\, p(x)} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1}$ sind konvergenzerhaltend und zwar multiplikativ.

enn das letzte Integral ist

$$= x \int_{\log \frac{x}{x_0}}^{\infty} e^{-t}\, t^{k-1}\, dt,$$

nd es ist bekanntlich für $y \to \infty$

3.5) $$\int_{y}^{\infty} e^{-t}\, t^{k-1}\, dt = e^{-y}\, y^{k-1} \left\{1 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right\} = O(e^{-y}\, y^{k-1}).$$

s ist also für alle hinreichend großen x der erste Summand rechts in (23.4)

$$< \frac{K'}{x\,|p(x)|} (\log x)^{k-1},$$

as nach (18.2) gegen 0 strebt.

Aus diesen Sätzen ergeben sich noch leicht die folgenden erweiterten ermanenzsätze:

24. *Aus* $C_r(x; s(t)) \simeq g\, p(x)$ *folgt*

4.1) $$C_{r+k}(x; s(t)) \simeq \frac{\Gamma(k+r+1)\,\Gamma(b+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(b+k+r)}\, g \cdot p(x),$$

nd aus $H_r(x; s(t)) \simeq g\, p(x)$ *folgt*

4.2) $$H_{r+k}(x; s(t)) \simeq a^k\, g \cdot p(x),$$

enn r *und* $k > 0$ *sind und* $p(x)$ *den von* 0 *verschiedenen Index* $a = \frac{1}{b}$ *hat.* Für $g = 0$ ist dies entsprechend wie in **23.** zu deuten.)

Beweis. Die Voraussetzung zu (24.1) besagt, daß

4.3) $$S_r(x; s(t)) \simeq \frac{g}{\Gamma(r+1)}\, x^r\, p(x)$$

. Da nun $S_{r+k} = S_k(S_r)$ ist [20]), da ferner $x^r p(x)$ regulär wächst und den ziproken Index $b + r$ hat [21]), so ist nach (23.1)

$$S_{r+k}(x; s(t)) = S_k(x; S_r(t)) \simeq \frac{\Gamma(b+r)}{\Gamma(r+1)\,\Gamma(b+r+k)}\, g \cdot x^{k+r}\, p(x),$$

oraus durch Division mit $x^{k+r}/\Gamma(k+r+1)$ die Behauptung (24.1) folgt.

Ganz ähnlich, aber noch unmittelbarer, folgt wegen $H_{k+r} = H_k(H_r)$ e Behauptung (24.2) aus der zugehörigen Voraussetzung nach (23.3).

---

[20]) Ausführlich: $S_{r+k}(x; s(t)) = S_k(x; S_r(t; s(u)))$.

[21]) Hier hat rechterhand genauer eine Funktion $p_1(x)$ aus $\mathfrak{P}$ zu stehen, die für alle reichend großen x mit $x^r p(x)$ übereinstimmt (vgl. die Bemerkung zu 5.).

Schließlich bedürfen wir noch des folgenden Mittelwertsatzes von M. Riesz [22]):

25. *Wird zur Abkürzung die S_k-Transformation der reellen Funktion $s(t)$ aus $\mathfrak{S}$*

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^x (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt = S_k(x)$$

gesetzt und ist $0 \leqq \xi < x$, $0 < k < 1$, so gilt: Für mindestens ein τ in $0 \leqq \tau < \xi$ ist

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{\xi} (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt = S_k(\tau). \tag{25. 1}$$

Nur eine Variante davon ist der entsprechende Satz für die H_k-Transformation [23]):

Wird zur Abkürzung bei reeller Funktion $s(t)$

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\,\frac{1}{x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt = H_k(x)$$

gesetzt und ist $0 \leqq \xi < x$, $0 < k < 1$, so gilt: Für mindestens ein τ in $0 \leqq \tau < \xi$ ist

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^{\xi} \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt = \tau\, H_k(\tau). \tag{25. 2}$$

IV. Der erweiterte Äquivalenzsatz für beliebige $k > 0$.

26. Der erweiterte Äquivalenzsatz (vgl. **6.**) kann so formuliert werden: Aus

$$\frac{k}{x^k}\int_0^x (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt \simeq g_k\, p(x) \tag{26. 1}$$

[22]) Vgl. Hardy-Riesz [7]), S. 28 f. Hier wird mit Recht betont, daß der Satz in der Theorie der C-Transformationen (oder also: der Riemann-Liouvilleschen Integrale dieselbe wichtige Rolle spielt wie der klassische Mittelwertsatz bei gewöhnlichen Ableitungen. Eine ausführlichere Behandlung des Satzes gibt M. Riesz, Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Szeged **1** (1923), S. 114—126. Eine vorläufige Form des Satzes findet sich schon bei M. Riesz, Sur une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci., Paris, **152** (1911), S. 1651—1654.

[23]) Ausgeführter Beweis bei M. Jácob [1], S. 676 ff.

gt

. 2) $$\frac{1}{\Gamma(k)\,x}\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\,dt \backsimeq g'_k\,p(x)$$

t

$$g'_k = \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}\,a^k\,g_k, \qquad \left(b=\frac{1}{a}\neq 0\right),$$

l umgekehrt, wofern $s(t)$ eine zugelassene Funktion, $p(x)$ regulär wachsend t einem Index $a \neq 0$ [24]) und $k > 0$ ist.

Nun kann (26. 1) in der Form

. 3) $$\int_0^x (x-t)^{k-1}\,s(t)\,dt = \frac{g_k}{k}\,x^k\,p(x) + o\left(x^k\,p(x)\right)$$

schrieben werden. Nach (22. 1) ist

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\,p(t)\,dt = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(b)}{\Gamma(k+b)}\,x^k\,p(x) + o\left(x^k\,p(x)\right).$$

tzt man also

. 4) $$s(t) - c\,p(t) = S(t) \quad \text{mit} \quad c = \frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}\,g_k,$$

erweist sich (26. 1) als gleichbedeutend mit

) $$\int_0^x (x-t)^{k-1}\,S(t)\,dt = o\left(x^k\,p(x)\right).$$

anz entsprechend erkennt man auf Grund von (22. 3), daß (26. 2) gleichdeutend ist mit

H) $$\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} S(t)\,dt = o\left(x\,p(x)\right),$$

d zwar mit *derselben* Funktion $S(t)$ aus (26. 4). Es handelt sich also darum zeigen, daß jede der beiden letzten Beziehungen aus der anderen folgt, ls $a \neq 0$ und $k > 0$ ist. Diese Doppelbehauptung wird erst für $0 < k \leq 1$, nn für $k > 1$ bewiesen. Es genügt offenbar, diese Beweise für *reelle Funknen* $S(t)$ durchzuführen. Denn besteht die Beziehung **(*C*)** für eine komplexrtige Funktion $S(t)$, so besteht sie auch einzeln für deren Real- und Imaärteil und umgekehrt. Da entsprechendes für **(*H*)** gilt, dürfen wir also iterhin annehmen, daß $S(t)$ *reell* ist.

[24]) Der Fall $a = 0$ wird im folgenden beiseite gelassen. Ob in ihm der erweiterte uivalenzsatz bei beliebigem $k > 0$ gilt, bleibt unentschieden.

27. *Schluß von* **(*H*)** *auf* **(*C*)** *für* $0 < k \leqq 1$. Da die Behauptung für $k = 1$ trivial ist, dürfen wir $0 < k < 1$ annehmen. Nach dem erweiterten Permanenzsatz **24.** folgt dann aus der Voraussetzung **(*H*)**, daß — die zu transformierende Funktion ist weiterhin stets $S(t)$ —

$$S_1(x) = x H_1(x) = x H_{1-k}(H_k) = o\big(x\, p(x)\big)$$

ist. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $x_1 > 1$, so daß in $t \geqq x_1$

$$|S_1(t)| < \varepsilon\, t\, |p(t)| \tag{27.1}$$

ist. Dies x_1 nehmen wir zugleich so groß an, daß für $t \geqq x_1$ auch

$$|t\, H_k(t)| < \varepsilon\, t\, |p(t)| \tag{27.2}$$

ausfällt, was nach **(*H*)** möglich ist. Wir nehmen nun $x > 2\, x_1$ und zerlegen das Integral $J(x)$ in der Behauptung **(*C*)** gemäß

$$J(x) = J = \int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + \int_{\frac{1}{2}x}^{x} = J_1 + J_2 + J_3.$$

Dann ist zunächst

$$|J_1| \leqq K \int_0^{x_1} (x-t)^{k-1}\, dt \;-\; O(x^{k-1}) = O\Big(\frac{x^k\, p(x)}{x\, p(x)}\Big) = o\big(x^k\, p(x)\big).$$

Für J_2 ergibt sich durch Teilintegration

$$J_2 = \Big[S_1(t)\,(x-t)^{k-1}\Big]_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + (k-1) \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} (x-t)^{k-2}\, S_1(t)\, dt.$$

Hierin ist die eckige Klammer [es ist (15.1) zu berücksichtigen!]

$$= S_1(\tfrac{1}{2}x)\,(\tfrac{1}{2}x)^{k-1} - S_1(x_1)\,(x-x_1)^{k-1} = o\big(x^k\, p(x)\big),$$

und das neue Integral ist wegen (27.1) seinem Betrage nach

$$< \varepsilon \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} (x-t)^{k-2}\, t\, |p(t)|\, dt < \varepsilon\, x^k \int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)^{k-2}\, t\, |p(xt)|\, dt.$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber nach **21.** asymptotisch gleich einem festen Vielfachen von $\varepsilon\, x^k\, |p(x)|$, für alle hinreichend großen x also $< \varepsilon K\, x^k\, |p(x)|$, d. h. wiederum $= o\big(x^k\, p(x)\big)$. Es ist also auch $J_2 = o\big(x^k\, p(x)\big)$.

Endlich schreiben wir J_3 in der Form

$$J_3 = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} \Big(\frac{x-t}{\log x - \log t}\Big)^{k-1} \Big(\log \frac{x}{t}\Big)^{k-1} S(t)\, dt.$$

e Funktion $\left(\frac{x-t}{\log x - \log t}\right)^{k-1}$ fällt nun, wenn t von 0 bis x läuft, monoton, aber positiv. Nach dem zweiten Mittelwertsatz kann daher

$$J_3 = \left(\frac{\frac{1}{2}x}{\log 2}\right)^{k-1} \int_{\frac{1}{2}x}^{\xi} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S(t)\,dt = K\,x^{k-1}\left\{\int_0^{\xi} - \int_0^{\frac{1}{2}x}\right\}$$

it passendem ξ in $\frac{1}{2}x \leqq \xi \leqq x$ gesetzt werden. Nach dem Mittelwertz (25. 2) ist also

$$|J_3| \leqq 2\,\Gamma(k)\,K\,x^{k-1} \cdot \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} |t\,H_k(t)|. \tag{7. 3}$$

$0 \leqq t \leqq x_1$ ist nun $t\,H_k(t)$ beschränkt, etwa dem Betrage nach $\leqq K_1$. eiter ist nach (27. 2)

$$\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} |t H_k(t)| \leqq \varepsilon \cdot \operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} t\,|p(t)|.$$

e Funktion $q_1(t) = t|p(t)|$, ($t \geqq x_1$; in $0 \leqq t \leqq x_1$ sei etwa $q_1(t) \equiv q_1(x_1)$), aber regulär wachsend mit dem reziproken Index $\beta_1 = \beta + 1 > 1$. Die nktion

$$Q_1(x) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} q_1(t),$$

, weil $q_1(t) \to \infty$ strebt, für alle hinreichend großen x mit $\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} q_1(t)$ ereinstimmt, ist nach **20.** wiederum regulär wachsend mit dem reziproken dex β_1, aber zugleich monoton, und es strebt $Q_1(x)/q_1(x) \to 1$. Daher ist

$$\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} |t\,H_k(t)| = o\,(Q_1(x)) = o\,(q_1(x)) = o\,(x\,p(x)).$$

egen $x\,|p(x)| \to \infty$ ist auch das in (27. 3) auftretende $\mathrm{Max} = o\,(x\,p(x))$. her ist J_3 und also auch $J = o\,(x^k\,p(x))$, wie behauptet.

Ein Beweis der eben durchgeführten Art wird im folgenden noch zweimal ftreten. Seine Struktur ist diese: In Voraussetzung und Behauptung tritt ein Integral der Form $\int_0^x V(x,t)\,s(t)\,dt$ auf [vgl. Äq. I. (1. 1)]. Für ein eignetes x_1 und $x > 2\,x_1$ wird das in der Behauptung stehende in die drei ile

$$J_1 = \int_0^{x_1}, \quad J_2 = \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x}, \quad J_3 = \int_{\frac{1}{2}x}^{x}$$

legt. In J_1 ist $s(t)$ beschränkt, J_2 wird durch Teilintegration in ein Integral icher Art mit $S_1(t) = \int_0^t s(u)\,du$ an Stelle von $s(t)$ übergeführt. In beiden

Fällen ergibt sich dann aus den Voraussetzungen leicht die gewünschte Abschätzung. Das schwierigste ist die Abschätzung von J_3. Hier wird durch Abtrennung eines monotonen Faktors im Integranden und Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes das Integral der Behauptung in ein solches der Voraussetzung übergeführt, über dessen Größenordnung dann die Mittelwertsätze (25. 1) und (25. 2) eine erste Auskunft geben. Das hierbei sich einstellende $\underset{0 \leqq t \leqq x}{\text{Max}}$ läßt sich dann mit Hilfe der monotonisierenden Funktionen aus **20.** und auf Grund der Voraussetzungen abschätzen.

28. *Schluß von* **(C)** *auf* **(H)** *für* $0 < k \leqq 1$ *und* $\Re(b) = \beta \geqq 1$. Bei dem umgekehrten Schluß von **(C)** auf **(H)** ist man gezwungen, die Fälle $\Re(b) = \beta \geqq 1$ und $0 < \beta < 1$ zu trennen. Wir setzen zunächst $\beta \geqq 1$ voraus und dürfen wieder $0 < k < 1$ annehmen. Wir schließen dann ganz ähnlich wie in **27.**: Von der Voraussetzung **(C)** gehen wir nach **24.** auf S_1 über und können nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ein x_1 so bestimmen, daß für $t \geqq x_1$ wieder (27. 1) gilt. Dies x_1 nehmen wir zugleich so groß, daß, wenn die linke Seite in **(C)** mit $S_k(x)$ bezeichnet wird, für $t \geqq x_1$ auch

$$|S_k(t)| < \varepsilon\, t^k\, |p(t)| \tag{28. 1}$$

ist, was auf Grund von **(C)** möglich ist.

Wir nehmen nun $x > 2\,x_1$, bezeichnen mit $J(x)$ das in der jetzigen Behauptung **(H)** auftretende Integral und zerlegen es gemäß dem letzten Absatz von **27.** in $J_1 + J_2 + J_3$. Dann ergibt sich zunächst

$$|J_1| = \int_0^{x_1} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S(t)\, dt \quad < K \cdot \int_0^{x_1} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} dt$$

$$= O\left(\log^{k-1} x\right) = o\left(x\, p(x)\right)$$

[vgl. die Abschätzung zu (23. 4)].

Für J_2 ergibt sich durch Teilintegration

$$J_2 = \left[\left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S_1(t)\right]_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + (k-1) \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-2} S_1(t) \frac{dt}{t}.$$

Hierin ist die eckige Klammer

$$= (\log 2)^{k-1} S_1(\tfrac{1}{2}x) - \left(\log \frac{x}{x_1}\right)^{k-1} S_1(x_1),$$

wegen (27. 1) also dem Betrage nach

$$< \varepsilon\, K\, x\, |p(x)| + O\left(\log^{k-1} x\right).$$

Sie ist also $= o(x\,p(x))$. Der andere Summand ist dem Betrage nach

$$< \varepsilon K \int_0^{\frac{1}{2}x} \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-2} |p(t)|\,dt = \varepsilon K x \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{t}\right)^{k-2} |p(xt)|\,dt.$$

Das letzte Integral ist aber nach **21.** [vgl. hierzu den Beweis von (22. 3)] asymptotisch gleich einem festen Vielfachen von $|p(x)|$, dieser Summand also weiter für alle hinreichend großen x

$$< \varepsilon K x\,|p(x)|,$$

ist also wiederum $= o(x\,p(x))$.

Für J_3 schreiben wir

$$J_3 = \int_{\frac{1}{2}x}^{x} (x-t)^{k-1} \left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{k-1} S(t)\,dt.$$

Nun wächst die (positive) Funktion $\left(\frac{\log x - \log t}{x-t}\right)^{k-1}$, wenn t von 1 bis x läuft, monoton und hat für $t \to x$ den Grenzwert x^{1-k}. Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist also

$$J_3 = x^{1-k} \int_{\xi}^{x} (x-t)^{k-1} S(t)\,dt \quad \text{mit} \quad \tfrac{1}{2}x \leqq \xi \leqq x.$$

Setzt man $\int_{\xi}^{x} = \int_0^x - \int_0^{\xi}$, so lehrt nun der Rieszsche Mittelwertsatz (25. 1), daß

(28. 2) $$|J_3| \leqq x^{1-k} \cdot 2\,\Gamma(k) \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} |S_k(t)|$$

ist mit $S_k(t)$ aus (C).

In $0 \leqq t \leqq x_1$ ist $|S_k(t)|$ beschränkt, etwa $\leqq K_1$. Weiter ist nach (28. 1)

$$\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} |S_k(t)| \leqq \varepsilon \cdot \operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} t^k\,|p(t)|.$$

Die Funktion $q_2(t) = t^k\,|p(t)|$, $(t \geqq x_1$; in $0 \leqq t \leqq x_1$ sei etwa $q_2(t) = q_2(x_1))$, ist aber (nach **12.** und **14.**) regulär wachsend mit dem reziproken Index $\beta_2 = k + \beta$. Da wir jetzt $\beta \geqq 1$ vorausgesetzt haben, ist $\beta_2 > 1$. Die Funktion

$$Q_2(x) = \operatorname*{Max}_{0 \leqq t \leqq x} q_2(t),$$

ist, weil $q_2(t) \to \infty$ strebt, für alle hinreichend großen x mit $\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} q_2(t)$ übereinstimmt, ist nach **20.** wiederum regulär wachsend mit dem reziproken Index β_2, aber zugleich monoton wachsend, und es strebt $Q_2(x)/q_2(x) \to 1$. Daher ist

$$\operatorname*{Max}_{x_1 \leqq t \leqq x} |S_k(t)| = o(Q_2(x)) = o(q_2(x)) = o(x^k\,p(x)).$$

Wegen $x^k\,|\,p(x)|\to\infty$ ist auch das in (28. 2) auftretende Max $= o\,(x^k\,p(x))$. Daher ist J_3 und also $J = o\,(x\,p(x))$, wie behauptet.

29. *Schluß von* (C) *auf* (H) *für* $0 < k \leqq 1$ *und* $0 < \Re(b) = \beta < 1$. Um das eben gewonnene Ergebnis auf den Fall $0 < \beta < 1$ zu übertragen, bedarf es zweier Hilfssätze:

A. *Es sei* $k > 0$ *und* $s(t)$ *irgendeine zugelassene Funktion. Aus*

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\,s(t)\,dt = o\,(x^k\,p(x)) \tag{29. 1}$$

folgt dann

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\,t s(t)\,dt = o\,(x^{k+1}\,p(x)) \tag{29. 2}$$

und umgekehrt. Und entsprechend

B. *Aus*

$$\int_0^x \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1}\,s(t)\,dt = o\,(x\,p(x)) \tag{29. 3}$$

folgt, falls $0 < k \leqq 1$,

$$\int_0^x \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1}\,t\,s(t)\,dt = o\,(x^2\,p(x)) \tag{29. 4}$$

und umgekehrt[25]).

Nehmen wir diese Sätze für den Augenblick als bewiesen an, so ergibt sich der in der Überschrift genannte Schluß nun ganz einfach: Aus (C) und $0 < \beta < 1$ folgt nach A., wenn $t\,S(t) = \overline{S}(t)$ und $t\,p(t) = p(t)$ gesetzt wird

$$(\overline{C}) \qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\,\overline{S}(t)\,dt = o\,(x^k\,\overline{p}\,(x)).$$

Da aber für $|p(x)|$ der reziproke Index $\beta = \beta + 1 > 1$ ist, so folgt hieraus nach **28.**

$$(\overline{H}) \qquad \int_0^x \Big(\log\frac{x}{t}\Big)^{k-1}\,\overline{S}(t)\,dt = o\,(x\,\overline{p}\,(x)) = o\,(x^2\,p\,(x))$$

und hieraus nach B. die Behauptung (H).

[25]) Zu diesen Hilfssätzen vgl. den ähnlichen, bezüglich der Vergleichsfunktionen aber spezielleren Grenzwertsatz 1, den ich für Zahlenfolgen in der Arbeit „Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit", Math. Zeitschr. **19** (1923), S. 97—113, bewiesen habe

Beweis von A. I. Wegen $t = x - (x-t)$ ist

$$\int_0^x (x-t)^{k-1}\, t\, s(t)\, dt$$

$$= x \int_0^x (x-t)^{k-1}\, s(t)\, dt - \int_0^x (x-t)^k\, s(t)\, dt = J_1(x) + J_2(x). \tag{29.5}$$

ach der Voraussetzung (29. 1) ist $J_1(x) = o\left(x^{k+1} p(x)\right)$ und nach dem erweiterten Permanenzsatz auch $J_2 = o\left(x^{k+1} p(x)\right)$, was (29. 2) beweist.

II. Mit $C_k(x; s(t)) = C_k(x)$ bedeutet (29. 2) gemäß (29. 5)

$$\frac{x^{k+1}}{k} C_k(x) - \int_0^x t^k\, C_k(t)\, dt = o\left(x^{k+1} p(x)\right)$$

ier wurde links $S_{k+1} = S_1(S_k)$ benutzt!] oder

$$\overline{C}(x) = C_k(x) - \frac{k}{x^{k+1}} \int_0^x t^k\, C_k(t)\, dt = o\left(p(x)\right).$$

ach Äq. I, (6. 4) und (6. 5) besitzt aber die hier in der Mitte stehende Operation, die $C_k(t)$ in $\overline{C}(x)$ überführt, eine Inverse, und zwar ist umgekehrt

$$C_k(x) = \overline{C}(x) + \frac{k}{x} \int_0^x \overline{C}(t)\, dt.$$

Wegen $\overline{C}(t) = o\left(p(t)\right)$ ist also auch $C_k(x) = o\left(p(x)\right)$, und dies ist gleichbedeutend mit (29. 1).

Beweis von B. I. Es ist für ein ξ in $0 \leqq \xi \leqq x$

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t\, s(t)\, dt = x \int_\xi^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} s(t)\, dt.$$

ach dem Mittelwertsatz (25. 2) ist also

$$\left| \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t\, s(t)\, dt \right| \leqq 2\, \Gamma(k)\, x \cdot \max_{0 \leqq t \leqq x} |t\, H_k(t)|. \tag{29.6}$$

n Anschluß an (27. 3) wurde aber auf Grund einer der jetzigen Annahme 9. 3) entsprechenden Voraussetzung gezeigt, daß das hier auftretende $ax = o\left(x\, p(x)\right)$ ist. Also gilt (29. 4).

II. Mit $t\,s(t) = s(t)$ lautet die nunmehrige Voraussetzung (29. 4)

$$\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} \bar{s}(t)\,dt = o\big(x^2\,p(x)\big) \tag{29. 7}$$

und die Behauptung (29. 3)

$$\int_0^x \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1} \bar{s}(t)\,\frac{dt}{t} = o\big(x\,p(x)\big) \tag{29. 8}$$

(doch ist dabei $\frac{1}{t}\,\bar{s}(t)$ in jeder rechten Umgebung von 0 beschränkt).

Aus (29. 7) folgt zunächst, wie am Anfang von **27.**, daß auch

$$\bar{S}_1(x) = \int_0^x \bar{s}(t)\,dt = o\big(x^2\,p(x)\big)$$

ist. Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ kann also x_1 so bestimmt werden, daß für $t \geqq x$

$$|\bar{S}_1(t)| < \varepsilon\,t^2\,|p(t)|. \tag{29. 9}$$

ist. Dies x_1 sei zugleich so groß, daß für $t \geqq x_1$ auch

$$|t\,H_k(t;\bar{s}(u))| < \varepsilon\,t^2\,|p(t)| \tag{29. 10}$$

ausfällt, was nach (29. 7) erreicht werden kann. Wir nehmen dann $x > 2x$ und zerlegen das Integral J der Behauptung (29. 8) wieder gemäß dem letzte Absatz von **27.** in $J_1 + J_2 + J_3$. Wörtlich wie in **28.** ergibt sich sofor $J_1 = o\big(x\,p(x)\big)$ und sehr ähnlich wie dort durch Teilintegration

$$J_2 = \left[\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}\frac{\bar{S}_1(t)}{t}\right]_{x_1}^{\frac{1}{2}x} + \int_{x_1}^{\frac{1}{2}x}\left\{(k-1)\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-2} + \left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}\right\}\frac{\bar{S}_1(t)}{t^2}\,dt,$$

auf Grund von (29. 9) und **21.** also

$$= o\big(x\,p(x)\big) + O\left(\log^{k-1}x\right) + o\big(x\,p(x)\big) = o\big(x\,p(x)\big).$$

Schließlich ist nach dem zweiten Mittelwertsatz für ein ξ in $\frac{1}{2}x \leqq \xi \leqq$

$$J_3 = \frac{2}{x}\int_{\frac{1}{2}x}^{\xi}\left(\log\frac{x}{t}\right)^{k-1}\bar{s}(t)\,dt,$$

nach (25. 2) also

$$|J_3| \leqq \frac{4}{x}\,\Gamma(k)\max_{0\leq t\leq x}\left|\int_0^t\left(\log\frac{t}{u}\right)^{k-1}\bar{s}(u)\,du\right|.$$

Wegen (29. 10) ergibt sich aber, genau wie bei (27. 3), für dieses Max die Abschätzung $o(x^2 p(x))$, so daß J_3 und folglich, wie behauptet, auch $J = o(x p(x))$ ist.

Zusatz 1. Aus dem Hilfssatz A kann ein weiterer und besonders einfacher Beweis des erweiterten Äquivalenzsatzes für ganzzahliges k ($\geqq 2$) gewonnen werden: Nach **26.** behauptet der Satz, daß jede der dortigen Beziehungen **(*C*)** und **(*H*)**, für die auch

$$\textbf{(C)} \qquad C_k(x; S(t)) = o(p(x)); \qquad\qquad \textbf{(H)} \qquad H_k(x; S(t)) = o(p(x))$$

geschrieben werden kann, aus der andern folgt. Wegen $S_k = S_{k-1}(S_1)$ ist nun **(*C*)** gleichbedeutend mit

$$\int_0^x (x-t)^{k-2} S_1(t)\, dt = \int_0^x (x-t)^{k-2}\, t\, H_1(t)\, dt = o(x^k p(x)).$$

Aus **(*C*)** folgt also nach Hilfssatz A die Beziehung

$$\int_0^x (x-t)^{k-2} H_1(t)\, dt = o(x^{k-1} p(x))$$

und umgekehrt. Ebenso aus dieser die Beziehung

$$\int_0^x (x-t)^{k-3} H_2(t)\, dt = o(x^{k-2} p(x))$$

und umgekehrt. Aus **(*C*)** folgt also schließlich

$$\int_0^x H_{k-1}(t)\, dt = o(x p(x)),$$

d. h.

$$\textbf{(H)} \qquad H_k(x) = o(p(x))$$

und umgekehrt.

Zusatz 2. Mit wenig mehr Mühe läßt sich zeigen, daß (29. 2) in Hilfssatz A durch

$$(29.\,2') \qquad \int_0^x (x-t)^{k-1}\, t^\varrho\, s(t)\, dt = o(x^{k+\varrho} p(x))$$

und (29. 4) in Hilfssatz B durch

$$(29.\,4') \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} t^\varrho\, s(t)\, dt = o(x^{1+\varrho} p(x))$$

($\varrho > 0$, beliebig) ersetzt werden kann und daß in B die Beschränkung bezüglich k (> 0) fortgelassen werden kann.

30. Die Ordnungen > 1. Um den Satz für die Ordnungen > 1 zu beweisen, genügt es, die Ordnungen $r + k$ mit ganzzahligem $r \geqq 1$ und $0 < k \leqq 1$ zu betrachten und zu zeigen, daß jede der beiden Beziehungen

$$(C') \qquad \int_0^x (x-t)^{r+k-1} S(t)\, dt = o\left(x^{r+k} p(x)\right)$$

und

$$(H') \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r+k-1} S(t)\, dt = o\left(x\, p(x)\right)$$

aus der anderen folgt.

31. Schluß von (C') auf (H'). Durch r-malige Teilintegration erhält das Integral in $(H)'$ die Form

$$\int_0^x S_r(t)\, D^r \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r+k-1} dt.$$

Dabei soll $S_r(t)$ das r-mal wiederholte Integral von $S(t)$ und D^r das gewöhnliche Symbol für die r-malige Differentiation nach t bedeuten. Mit gewissen Zahlenwerten c_ϱ ist nun

$$D^r \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r+k-1} = \frac{1}{t^r} \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r-\varrho+k-1}.$$

Die Behauptung (H') geht also über in

$$(31.1) \qquad \sum_{\varrho=1}^{r} c_\varrho \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r-\varrho+k-1} S_r(t) \frac{dt}{t^r} = o\left(x\, p(x)\right).$$

Ist nun $\varrho < r$, so erhält man für das ϱ-te Integral in dieser Summe durch nochmalige Teilintegration zwei Integrale der Form

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{r-\varrho+k-1} S_{r+1}(t) \frac{dt}{t^{r+1}}$$

mit $1 \leqq \varrho \leqq r$. Nach dem erweiterten Permanenzsatz **24.** folgt aber aus der jetzigen Voraussetzung, d. h. aus $C_{r+k}(x) = o\left(p(x)\right)$, daß auch $C_{r+1} = o\left(p(x)\right)$, also $S_{r+1}(t) = o\left(t^{r+1} p(t)\right)$ ist. Nach **23.** sind also alle diese Integrale $= o\left(x\, p(x)\right)$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß das in (31.1) für $\varrho = r$ auftretende Integral

$$(31.2) \qquad \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} \frac{S_r(t)}{t^r} dt = o\left(x\, p(x)\right)$$

st. Aus der Voraussetzung (C'), d. h. aus $S_k(S_r) = o\left(x^k \cdot x^r p(x)\right)$ folgt vegen $0 < k \leqq 1$ nach **28.** [es ist hierbei $x^r p(x)$ als Vergleichsfunktion zu ehmen] zunächst, daß

$$\int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right)^{k-1} S_r(t)\, dt = o\left(x^{r+1} p(x)\right)$$

st, und hieraus durch r-malige Anwendung des Hilfssatzes B sofort die Beziehung (31. 2), denn $t^{-r} S_r(t)$ ist eine Funktion aus $\mathfrak{S}$, da sie für $t > 0$ ogar stetig ist und für $t \to +0$ beschränkt bleibt.

32. *Schluß von* (H') *auf* (C'). Die r-malige Teilintegration des Integrals n (C') bringt es auf die Form

$$\int_0^x H_r(t)\, D_r (x-t)^{r+k-1}\, dt,$$

renn $D_r \varphi(t)$ durch $D_0 \varphi(t) = \varphi(t)$, $D_r \varphi(t) = t \frac{d}{dt} D_{r-1} \varphi(t)$ erklärt wird.

Mit gewissen Zahlenwerten d_ϱ ist aber

$$D_r (x-t)^{r+k-1} = \sum_{\varrho=1}^{r} d_\varrho\, t^\varrho\, (x-t)^{r-\varrho+k-1}$$

nd die Behauptung (C') geht somit über in

32. 1) $$\sum_{\varrho=1}^{r} d_\varrho \int_0^x H_r(t)\, t^\varrho (x-t)^{r-\varrho+k-1} dt = o\left(x^{r+k} p(x)\right).$$

st $\varrho < r$, so liefert das ϱ-te Integral in dieser Summe durch nochmalige eilintegration je zwei Integrale der Form

$$\int_0^x H_{r+1}(t)\, t^\varrho (x-t)^{r-\varrho+k-1}\, dt$$

nit $1 \leqq \varrho \leqq r$. Nach dem erweiterten Permanenzsatz **24.** folgt aber aus der oraussetzung (H'), d. h. $H_{r+k}(x) = o\left(p(x)\right)$, daß auch $H_{r+1}(x) = o\left(p(x)\right)$ st. Nach (23. 1) sind also alle diese Integrale $= o\left(x^{r+k} p(x)\right)$.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß auch das in (32. 1) für $\varrho = r$ auftretende Integral

32. 2) $$\int_0^x (x-t)^{k-1} t^r H_r(t)\, dt = o\left(x^{r+k} p(x)\right)$$

ist. Aus der Voraussetzung (H'), d. h. aus $H_k(H_r) = o(p(x))$ folgt abe wegen $0 < k \leqq 1$ nach **27.**, daß

$$\int_0^x (x-t)^{k-1} H_r(t)\, dt = o(x^k p(x))$$

ist, und hieraus (32. 2) durch r-malige Anwendung des Hilfssatzes A in **29** Damit ist der Beweis vollendet.

V. Die Abel-Laplaceschen Mittelbildungen.

33. Der ursprüngliche Hölдersche Satz besagt, daß aus der H_k-Limitier barkeit einer Folge (s_n) ihre A-Limitierbarkeit zum gleichen Werte folgt I. Schur [3] hatte für positive regulär wachsende Vergleichsfolgen (φ_n) und ganzzahlige Ordnung k schon gezeigt, daß auch das asymptotische Verhalten der H_k-Mittel sich auf das der A-Mittel überträgt. Die im vorangehenden entwickelten Methoden setzen uns instand, einen entsprechenden Satz für Funktionen $s(t)$, beliebige reelle Ordnung $k > 0$ und beliebige regulär wachsende Vergleichsfunktionen $p(x)$ zu beweisen. Der Satz lautet:

Für eine zugelassene Funktion $s(t)$, für ein $k > 0$ und ein regulär wachsendes $p(x)$ mit einem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$ strebe

$$\text{(33. 1)} \qquad \frac{H_k(x; s(t))}{p(x)} \to s \quad \text{oder} \quad \frac{C_k(x; s(t))}{p(x)} \to \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(b)}{a^k\,\Gamma(k+b)}\, s$$

(so daß nach dem erweiterten Äquivalenzsatz beide Beziehungen gelten). Dann ist die A-Transformation von $s(t)$

$$A(x; s(t)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} s(t)\, dt$$

für $x > 0$ vorhanden, und es strebt

$$\text{(33. 2)} \qquad \frac{A(x; s(t))}{p(x)} \to \frac{\Gamma(b)}{a^k}\, s.$$

Den Sätzen in **21.**, **22.** und **23.** entsprechend, beweisen wir zunächst die folgenden beiden Hilfssätze:

34. *Ist $p(x)$ regulär wachsend mit dem Index $a = \frac{1}{b} \neq 0$, so ist die A-Transformation von $p(x)$*

$$A(x; p(t)) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} p(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} p(xt)\, dt$$

für $x > 0$ konvergent, und es gilt die Beziehung

$$\text{(34. 1)} \qquad A(x; p(t)) \simeq \Gamma(b)\, p(x).$$

Beweis. Nach (9. 1) gilt $p(x) = O(x^m)$ für ein geeignetes m; daher eht die Konvergenz der Integrale für $x > 0$ außer Frage. Wir betrachten ın für ein $\varepsilon > 0$ erstlich den Ausdruck

$$J_1(x) = \left| \frac{1}{p(x)} \int_0^{\varepsilon} e^{-t}\, p(xt)\, dt \right| \leqq \frac{1}{|p(x)|} \int_0^{\varepsilon} |p(xt)|\, dt = \frac{1}{x\,|p(x)|} \int_0^{\varepsilon x} |p(t)|\, dt$$

$$= \varepsilon \left| \frac{p(\varepsilon x)}{p(x)} \right| \frac{1}{\varepsilon x\,|p(\varepsilon x)|} \int_0^{\varepsilon x} |p(t)|\, dt \leqq \varepsilon \left| \frac{p(\varepsilon x)}{p(x)} \right| M.$$

er letzte Ausdruck strebt $\to M\varepsilon^{\beta}$, so daß für alle $x > x_1(\varepsilon)$

4. 2) $$J_1(x) < 2\, M\, \varepsilon^{\beta}$$

. Das ε denken wir uns so klein, daß mit $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$

4. 3) $$t^{\beta-1} < e^{\frac{1}{2}t} \text{ für } t \geqq \omega \quad \text{und} \quad \int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\, t^{\mu}\, dt < 2\, e^{-\omega}\, \omega^{\mu} < \varepsilon$$

, wenn μ den gleich nachher genannten, nur von β abhängigen Wert hat. ne solche Wahl von ε ist offenbar möglich, da [vgl. (23. 5)] das letzte Integral $e^{-\omega}\, \omega^{\mu} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}$ ist. Nun betrachten wir zweitens den Ausdruck

$$J_2(x) = \frac{1}{p(x)} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\, p(xt)\, dt.$$

ist

$$J_2(x) \leqq \frac{x^{\mu}}{|p(x)|} \int_{\omega}^{x} e^{-t} t^{\mu} \left| \frac{p(xt)}{(xt)^{\mu}} \right| dt.$$

erin wählen wir μ so, daß $t^{-\mu}\,|p(t)|$ regulär wächst und einen reziproken dex $\beta' < 1$ hat. Es genügt dazu, wenn wir etwa

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < \beta < 1 \text{ ist,} \\ \beta - \frac{1}{2}, & \text{falls } \beta \geqq 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

zen. Denn dann ist $\beta' = \beta - \mu$, d. h. $= \beta$ oder $= \frac{1}{2}$, je nachdem $\beta < 1$ er $\geqq 1$ ist, also jedenfalls $\beta' < 1$. Daher ist nach **20.** die Funktion

$$q(x) = \operatorname*{Max}_{t \geqq x} \left| \frac{p(t)}{t^{\mu}} \right|$$

gulär wachsend mit dem reziproken Index β' und überdies monoton fallend. so ist

$$J_2(x) \leqq \left| \frac{q(x)}{\frac{p(x)}{x^{\mu}}} \right| \cdot \frac{q(\omega x)}{q(x)} \int_{\omega}^{\infty} e^{-t} t^{\mu}\, dt.$$

Der erste Faktor rechts strebt (nach **20.**) gegen 1, der zweite $\to \omega^{\beta'-1}$. Für alle $x > x_2(\varepsilon)$ ist also

$$J_2(x) < 2\,\omega^{\beta'-1}\int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{\mu}\,dt < 4\,e^{-\omega}\,\omega^{\beta-1}.$$

Wegen $\beta - 1 < \mu$ ist dies wiederum $< 2\varepsilon$.

Ganz ähnlich hat man

$$J_3(x) = \left|\int_0^{\varepsilon} e^{-t}\,t^{b-1}\,dt\right| \leqq \int_0^{\varepsilon} t^{\beta-1}\,dt = \frac{1}{\beta}\,\varepsilon^{\beta}$$

und nach (34. 3)

$$J_4(x) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-t}\,t^{b-1}\,dt < \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\,dt = 2\,e^{-\frac{1}{2}\omega}.$$

Hiernach ist

$$\frac{1}{p(x)}\int_0^{\infty} e^{-t}\,p(x\,t)\,dt - \int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{b-1}\,dt = \int_{\varepsilon}^{\omega} e^{-t}\left[\frac{p(x\,t)}{p(x)} - t^{b-1}\right]dt + \eta(x,)$$

mit einem $\eta(x)$, dessen Betrag für $x > \mathrm{Max}(x_1, x_2)$ unter der Summe der vier für J_1, J_2, J_3, J_4 gefundenen Schranken bleibt. Für $x > x_3(\varepsilon)$ ist auch (vgl. den Beweis von **21.**) der Wert des neuen Integrals $< \varepsilon$. Für alle hinreichend großen x ist also die linke, von ε unabhängige Seite dem Betrage nach kleiner als ein Wert, der mit ε beliebig klein gemacht werden kann. Etwas allgemeiner gilt:

35. *Aus* $s(t) \simeq g \cdot p(t)$ *folgt*

$$A(x; s(t))\,dt = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,s(t)\,dt \simeq \Gamma(b)\,g\cdot p(x). \tag{35. 1}$$

Beweis. Setzen wir $s(t) = (g + \varepsilon(t))\,p(t)$, $\varepsilon(t) \to 0$, so ist

$$A(x; s(t)) = g\,A(x; p(t)) + A(x; \varepsilon(t)\,p(t)).$$

Nach **34.** genügt es also zu zeigen, daß der zweite Summand rechts $= o(p(x))$ ist. Ist aber $|\varepsilon(t)| < \varepsilon$ für $t \geqq x_0(\varepsilon)$, so ist

$$|A(x; \varepsilon(t)\,p(t))| \leqq \frac{K}{x}\int_0^{x_0} e^{-\frac{t}{x}}\,dt + \varepsilon\cdot\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{x}}\,|p(t)|\,dt.$$

Der erste Summand rechts ist offenbar $O\left(\frac{1}{x}\right) = O\left(\frac{p(x)}{x\,p(x)}\right) = o(p(x))$, der zweite, da nach **34.** das Integral in ihm $\sim \Gamma(\beta)\,|p(x)|$ ist, kleiner als $\varepsilon K\,|p(x)|$, womit die Behauptung schon bewiesen ist. [Im Falle $g = 0$ ist

natürlich die rechte Seite der Voraussetzung durch $o(p(t))$, die der Behauptung durch $o(p(x))$ zu ersetzen.]

36. *Beweis des Satzes in* **33.** Wir nehmen die Konvergenz der auftretenden Integrale (für $x > 0$). die sich sogleich von selbst ergeben wird, zunächst an. Nach (22. 3) ist $H_k(x; p(t)) \simeq a^k p(x)$. Also ist die Voraussetzung (33. 1) gleichbedeutend mit

$$(\boldsymbol{H}) \qquad H_k(x; S(t)) = o(p(x))$$

mit

$$(36.\,1) \qquad S(t) = s(t) - \frac{s}{a^k}\, p(t).$$

Nach (34. 1) ergibt sich ebenso, daß die Behauptung (33. 2) gleichbedeutend ist mit

$$(\boldsymbol{A}) \qquad A(x; S(t)) = o(p(x))$$

mit derselben Funktion $S(t)$ aus (36. 1). Es braucht also nur $(\boldsymbol{A})$ aus $(\boldsymbol{H})$ gefolgert zu werden. Nach dem erweiterten Äquivalenzsatz ist aber $(\boldsymbol{H})$ gleichbedeutend mit

$$(\boldsymbol{C}) \qquad C_k(x; S(t)) = o(p(x)),$$

und nach Äq. I, § 7, ist

$$(36.\,2) \qquad A(x; S(t)) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}}\, t^k\, C_k(t; S(u))\, dt.$$

Wegen $(\boldsymbol{C})$ und $p(x) = O(x^m)$ ist das rechts stehende Integral für $x > 0$ sicher konvergent, und da (36. 2) sich durch eine erlaubte Vertauschung zweier Integrationen unmittelbar nachprüfen läßt (s. Äq. I, S. 261 und 241/3), so ist $A(x; S(t))$ und folglich auch $A(x; s(t))$ für $x > 0$ konvergent. Nach $(\boldsymbol{C})$ ist nun weiter $t^k C_k(t; S(u)) = o(t^k p(t))$. Nach dem Satz in **35.**, bei dem man $p(t)$ durch $t^k p(t)$ zu ersetzen hat, folgt also

$$A(x; S(t)) = o\left(\frac{1}{x^k} \cdot x^k\, p(x)\right) = o(p(x)),$$

wie behauptet.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)

Bemerkungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Herrn F. Pfeiffer zum 60. Geburtstag gewidmet.

Von

E. Kamke in Tübingen.

Es handelt sich hier im Bereich reeller Veränderlicher um eine einzige partielle Differentialgleichung erster Ordnung und um Systeme von solchen für eine gesuchte Funktion, ferner um die entsprechenden linearen Differentialgleichungen[1]). In methodischer Hinsicht wird insofern kaum etwas Neues gebracht, als die Grundgedanken der Beweise schon lange zum klassisch gewordenen Bestand der Theorie der partiellen Differentialgleichungen gehören. Dagegen dürfte die Durchführung im einzelnen doch mancherlei Neues enthalten. Es werden Existenzbereiche wirklich angegeben[2]), wobei es mir jedoch weniger auf möglichst genaue als auf leicht angebbare Bereiche ankommt, in denen die Lösung zugleich eindeutig bestimmt ist. Ferner werden auch Aussagen über mehrmalige Differenzierbarkeit der Lösungen und ihre Abhängigkeit von Parametern gemacht. Solche Aussagen braucht man bei der Zurückführung von Systemen von Differentialgleichungen auf eine einzige Differentialgleichung sowie bei dem Nachweis der Existenz vollständiger Integrale. Schließlich wird die Gelegenheit benutzt, einige Irrtümer zu berichtigen, die sich in der Literatur finden. Für nähere Angaben zu all diesem sei auf die einzelnen Abschnitte verwiesen, insbesondere auf die Fußnoten.

§ 1.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine Differentialgleichung.

Es handelt sich hier um die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \ldots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_n}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m\right)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$p = f(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda), \tag{1}$$

[1]) Nicht quasilineare, wohl aber allgemeine lineare (auch unhomogene) Differentialgleichungen.

[2]) Für *eine* partielle Differentialgleichung hat das schon Herr Ważewski getan.

wo

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu}$$

ist und $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_n$ geschrieben ist, $\mathfrak{q}$ für $q_1, \ldots, q_n$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; die $\lambda_\varkappa$ sind Parameter.

Satz 1. Voraussetzung. *Für fest gegebenes ξ existieren in dem Bereich*

$$|x - \xi| \leqq a; \quad \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [3]} \tag{2}$$

die partiellen Ableitungen f_{y_ν}, f_z, f_{q_ν} und sind nebst der Funktion $f(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda)$ *selber k-mal stetig differenzierbar ($k \geqq 1$) nach allen $2n + m + 2$ Argumenten x, $y_\varkappa$, z, $q_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$. Ferner ist für $\mu, \nu = 1, \ldots, n$*

$$\left\{ \begin{matrix} |f_x|, \ |f_{y_\nu}|, \ |f_z|, \ |f_{q_\nu}| \\ |f_{y_\mu y_\nu}|, \ |f_{y_\mu z}|, \ |f_{y_\mu q_1}|, \ |f_{zz}|, \ |f_{z q_\nu}|, \ |f_{q_\mu q_\nu}| \end{matrix} \right\} \leqq A. \tag{3}$$

In dem Bereich

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [3]}$$

existieren für die gegebene Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ die partiellen Ableitungen ω_{y_ν} und sind nebst ω selber k-mal stetig differenzierbar nach den $y_\varkappa$ und $\lambda_\varkappa$; ferner ist

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{\nu=1}^{n} |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqq B \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Schließlich sei

$$0 < \beta < \frac{1}{A} \log\left(1 + \frac{\log 3}{2n(B+1)}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \operatorname{Min}(a, \beta). \tag{5}$$

Behauptung. *Bei gegebenen λ hat die Differentialgleichung* (1) *in dem Bereich*

$$|x - \xi| \leqq \alpha; \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

genau ein zweimal stetig differenzierbares Integral

$$z = \psi(x, \mathfrak{y}, \lambda),$$

das für $x = \xi$ die Werte

$$\psi(\xi, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda) \tag{6}$$

annimmt. Die Funktion $\psi(x, \mathfrak{y}, \lambda)$ ist nebst den Ableitungen ψ_x und ψ_{y_ν} in dem Bereich

$$|x - \xi| \leqq \alpha, \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \tag{7}$$

k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren $n + m + 1$ Argumenten x, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ [4].

[3]) Diese abgeschlossenen Intervalle können auch durch halboffene oder offene Intervalle oder durch eine beliebige offene Punktmenge im λ-Raum ersetzt werden.

[4]) Dieser Satz ist im wesentlichen von Herrn Ważewski aufgestellt [Annales de la Société Polonaise Mathématique **13** (1935), S. 1–9]. Neu ist nur die Formulierung

Zusatz 1. Es kann

$$\beta = \frac{1}{3nA(B+1)}, \quad \text{also } \alpha = \operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{3nA(B+1)}\right)$$

gewählt werden.

Denn nach (5) ist

$$\frac{1}{3n(B+1)} < \log\left(1 + \frac{\log 3}{2n(B+1)}\right), \quad \text{d. h. } \exp\frac{1}{3n(B+1)} - 1 < \frac{\log 3}{2n(B+1)}$$

zu beweisen. Für $0 \leqq u \leqq \frac{1}{3}$ ist

$$e^u = 1 + u\left(1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \cdots\right)$$
$$\leqq 1 + u\left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{6}{5}u.$$

Daher ist in der Tat

$$\exp\frac{1}{3n(B+1)} - 1 \leqq \frac{2}{5n(B+1)} < \frac{\log 3}{2n(B+1)}.$$

Zusatz 2. In Satz 1 können die Ungleichungen $|x - \xi| \leqq a$, $|x - \xi| \leqq \alpha$ auch durch $|x - \xi| < a$, $|x - \xi| < \alpha$ ersetzt werden.

Denn bei gegebenem a ist der Satz dann in der ursprünglichen Fassung richtig, wenn a durch eine beliebige Zahl $a_1 < a$ ersetzt wird. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit des Integrals folgt daraus der Zusatz 2.

Beweis des Satzes. **(a)** *Die Charakteristiken und ihr Existenzbereich.* Die charakteristischen Gleichungen der Differentialgleichung (1) sind

$$(8) \qquad \begin{cases} y_\nu'(x) = -f_{q_\nu} & (\nu = 1, \ldots, n) \\ z'(x) = f - \sum_{\varkappa=1}^{n} q_\varkappa f_{q_\varkappa}, & \\ q_\nu'(x) = f_{y_\nu} + q_\nu f_z & (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nach der Voraussetzung sind die rechten Seiten k-mal stetig differenzierbar nach $x, y_\mu, z, q_\mu, \lambda_\mu$. Daher gibt es für ein beliebiges ξ^* innerhalb der Grenzen

der Aussagen über mehrfache Differenzierbarkeit des Integrals und seine Abhängigkeit von den Parametern sowie die Ungleichung (5), die bei WAŻEWSKI in weniger durchsichtiger Form auftritt; ihm ist anscheinend — vgl. a. a. O., S. 9 — die Umformung in die einfachere Gestalt (5) entgangen. Für den Beweis zieht Herr WAŻEWSKI einen Abbildungssatz von HADAMARD heran. Das, was man davon braucht, läßt sich hier jedoch leichter auch unmittelbar herleiten. Es entsteht dann ein Beweis, der wie der nachfolgende eine unmittelbare Ausdehnung des von KAMKE [Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, S. 352ff.] für $n = 1$ gegebenen auf den Fall eines beliebigen n ist. Es erschien mir angebracht, nicht nur die einzelnen Abänderungen zu dem Beweis WAŻEWSKIS anzugeben, sondern den Beweis im Zusammenhang darzustellen.

Für einen Existenzbeweis für eine endliche Doppelpyramide s. WAŻEWSKI, a. a. O. 14 (1936), S. 149—177.

$|\xi^* - \xi| \leqq a$ und für ein beliebiges Zahlensystem $\mathfrak{y}^*$, z^*, $\mathfrak{q}^*$, λ genau eine Integralkurve des Systems (8), die durch den Punkt ξ^*, $\mathfrak{y}^*$, z^*, $\mathfrak{q}^*$ geht; diese sei

$$(9)\qquad \begin{cases} y_\nu = y^\nu(x, \xi^*, \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^*, \lambda) & (\nu = 1, \ldots, n), \\ z = z(x, \xi^*, \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^*, \lambda), & \\ q_\nu = q^\nu(x, \xi^*, \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^*, \lambda) & (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Diese Funktionen, die sogenannten charakteristischen Funktionen des Systems (8), haben an jeder Stelle ihres Existenzbereichs stetige partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschl. nach allen $2n + m + 3$ Argumenten x, ξ^*, $y_\varkappa^*$, z^*, $q_\varkappa^*$, $\lambda_\varkappa$[5]).

Es wird behauptet, daß die Funktionen (9) in dem Bereich

$$(10)\qquad |x - \xi| \leqq a,\ |\xi^* - \xi| \leqq a;\ \mathfrak{y}^*, z^*, \mathfrak{q}^* \text{ beliebig};\ \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^*$$

existieren.

Aus der ersten Zeile von (8) folgt nämlich wegen (3)

$$|y_\nu'(x)| \leqq A,$$

also

$$(11)\qquad |y_\nu(x) - y_\nu^*| = |y_\nu(x) - y_\nu(\xi^*)| \leqq 2aA,$$

und aus der dritten Zeile von (8)

$$|q_\nu'(x)| \leqq A|q_\nu| + A,$$

also[6])

$$(12)\qquad |q_\nu(x)| \leqq (|q_\nu(\xi^*)| + 1)\, e^{A|x-\xi^*|} - 1$$

und somit

$$(13)\qquad |q_\nu(x) < (|q_\nu^*| + 1)\, e^{2aA}.$$

Es bleibt noch $z(x)$ abzuschätzen. Nach dem Mittelwertsatz ist wegen (3), (11) und (13)

$$\begin{aligned} |f(x, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda) - f(\xi^*, 0, 0, 0, \lambda)| &\leqq |x - \xi^*| A + \sum_\nu |y_\nu| A + |z| A + \sum_\nu |q_\nu| A \\ &\leqq A|z| + C, \end{aligned}$$

wo C eine passend gewählte Konstante ist. Daher folgt aus der zweiten Zeile von (8)

$$|z'(x)| \leqq A|z| + C + A \sum_\varkappa (|q_\varkappa^*| + 1)\, e^{2aA} = A|z| + D$$

---

[5]) Vgl. dazu etwa Ka, DGlen 1930 — Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930, S. 164f. Nach dem dortigen Satz 3 haben die Funktionen (9) zunächst nur stetige partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung nach den $y_\varkappa^*$, z^*, $q_\varkappa^*$, $\lambda_\varkappa$, aber aus den Überlegungen zu dem dortigen Satz 4 auf S. 166 ergibt sich dann die volle obige Behauptung.

[6]) Vgl. z. B. Ka, DGlen 1930, S. 93.

und somit[6])

$$|z(x)| \leqq \left(|z^*| + \frac{D}{A}\right) e^{2aA}.$$

Für jede einzelne Charakteristik (9), soweit sie existiert, liegen also y_ν, z, q_ν unter einer festen Schranke. Da die Charakteristik bei festem λ nach beiden Seiten an den Rand des Bereiches (2) herankommen muß, existiert sie also im ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq a$ und die Funktionen (9) somit im Bereich (10).

(b) *Die Funktionen* Y^ν, Z, Q^ν; *Existenzbereich und Differenzierbarkeit.* In (9) wird nun $\xi^* = \xi$ gesetzt und

$$\mathfrak{y}^* = (\eta_1, \ldots, \eta_n),\ z^* = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda),\ \mathfrak{q}^* = (\omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n})$$

eingetragen. Ferner wird zur Abkürzung

$$(14)\quad \begin{cases} Y^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = y^\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}, \lambda), \\ Z(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = z(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}, \lambda), \\ Q^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = q^\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \omega, \omega_{\eta_1}, \ldots, \omega_{\eta_n}, \lambda) \end{cases}$$

gesetzt. Nach (a) existieren die linken Seiten dann für

$$|x - \xi| \leqq a;\quad \eta_1, \ldots, \eta_n \text{ beliebig};\quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^*$$

und sind dort k-mal stetig differenzierbar nach $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$ auf Grund von (a) und der Voraussetzung über ω.

Ferner ist

$$(15)\quad \begin{cases} Y^\nu_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = e_{\mu,\nu}, \\ Z_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \omega_{\eta_\mu}, \\ Q^\nu_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \omega_{\eta_\mu \eta_\nu}. \end{cases}$$

Denn[7]) die partiellen Ableitungen der charakteristischen Funktionen (9) nach den Anfangswerten y_ν^*, z^*, q_ν^* haben für $x = \xi$ die Werte

$$\begin{aligned} &y^\nu_{y_\mu^*}(\xi) = e_{\mu,\nu}, \quad y^\nu_{z^*}(\xi) = 0, \quad y^\nu_{q_\mu^*}(\xi) = 0, \\ &z_{y_\mu^*}(\xi) = 0, \quad z_{z^*}(\xi) = 1, \quad z_{q_\mu^*}(\xi) = 0, \\ &q^\nu_{y_\mu^*}(\xi) = 0, \quad q^\nu_{z^*}(\xi) = 0, \quad q^\nu_{q_\mu^*}(\xi) = e_{\mu,\nu}. \end{aligned}$$

Daher folgt aus (14) für die in (15) auftretenden Ableitungen in der Tat

$$\begin{aligned} Y^\nu_{\eta_\mu}(\xi) &= y^\nu_{y_\mu^*}(\xi) + y^\nu_{z^*}(\xi)\,\omega_{\eta_\mu} + \sum_\varkappa y^\nu_{q_\varkappa^*}(\xi)\,\omega_{\eta_\varkappa \eta_\mu} = e_{\mu,\nu}, \\ Z_{\eta_\mu}(\xi) &= z_{y_\mu^*}(\xi) + z_{z^*}(\xi)\,\omega_{\eta_\mu} + \sum_\varkappa z_{q_\varkappa^*}(\xi)\,\omega_{\eta_\varkappa \eta_\mu} = \omega_{\eta_\mu}, \\ Q^\nu_{\eta_\mu}(\xi) &= q^\nu_{y_\mu^*}(\xi) + q^\nu_{z^*}(\xi)\,\omega_{\eta_\mu} + \sum_\varkappa q^\nu_{q_\varkappa^*}(\xi)\,\omega_{\eta_\varkappa \eta_\mu} = \omega_{\eta_\mu \eta_\nu}. \end{aligned}$$

[7]) Vgl. z. B. Ka, DGlen 1930, S. 155ff.

(c) *Abschätzung von*

$$U(x) = \sum_{\varkappa=1}^{n} |Y^{\varkappa}_{\eta_\mu}| + |Z_{\eta_\mu}| + \sum_{\varkappa=1}^{n} |Q^{\varkappa}_{\eta_\mu}|. \tag{16}$$

Man trage die Funktionen (14) in (8) ein und differenziere nach η_μ. Die erste Zeile von (8) liefert dann

$$Y^{\nu}_{\eta_\mu x} = -\sum_{\varkappa} f_{q_\nu y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} - f_{q_\nu z} Z_{\eta_\mu} - \sum_{\varkappa} f_{q_\nu q_\varkappa} Q^{\varkappa}_{\eta_\mu},$$

also nach (3)

$$|Y^{\nu}_{\eta_\mu x}| \leqq A\, U(x). \tag{17}$$

Die zweite Zeile von (8) liefert

$$Z_{\eta_\mu x} = \sum_{\varkappa} f_{y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_z Z_{\eta_\mu} - \sum_{\varkappa} Q^{\varkappa} \Big(\sum_{\varrho} f_{q_\varkappa y_\varrho} Y^{\varrho}_{\eta_\mu} + f_{q_\varkappa z} Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varrho} f_{q_\varkappa q_\varrho} Q^{\varrho}_{\eta_\mu}\Big),$$

das ist nach der Zeile vor (17)

$$Z_{\eta_\mu x} = \sum_{\varkappa} f_{y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_z Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varkappa} Q^{\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu x}. \tag{18}$$

Nach (3) und (17) ist also

$$|Z_{\eta_\mu x}| \leqq A \Big(\sum_{\varkappa} |Y^{\varkappa}_{\eta_\mu}| + |Z_{\eta_\mu}|\Big) + AU \sum_{\varkappa} |Q^{\varkappa}|. \tag{19}$$

Schließlich liefert die dritte Zeile von (8)

$$\begin{aligned} Q^{\nu}_{\eta_\mu x} = {} & \sum_{\varkappa} f_{y_\nu y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_{y_\nu z} Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varkappa} f_{y_\nu q_\varkappa} Q^{\varkappa}_{\eta_\mu} + \\ & + Q^{\nu}_{\eta_\mu} f_z + Q^{\nu} \Big(\sum_{\varkappa} f_{z y_\varkappa} Y^{\varkappa}_{\eta_\mu} + f_{zz} Z_{\eta_\mu} + \sum_{\varkappa} f_{z q_\varkappa} Q^{\varkappa}_{\eta_\mu}\Big). \end{aligned} \tag{20}$$

Nach (3) und (16) ist also

$$|Q^{\nu}_{\eta_\mu x}| \leqq AU + A\,|Q^{\nu}_{\eta_\mu}| + AU\,|Q^{\nu}|. \tag{21}$$

Aus (17), (19) und (21) folgt

$$\begin{aligned} |U'_+(x)| &\leqq \sum_{\nu} |Y^{\nu}_{\eta_\mu x}| + |Z_{\eta_\mu x}| + \sum_{\nu} |Q^{\nu}_{\eta_\mu x}| \\ &\leqq (2n+1)\, AU + 2\, AU \sum_{\nu} |Q^{\nu}|. \end{aligned}$$

Da $q^*_\nu = \omega_{\eta_\nu}$ und $\xi^* = \xi$ gewählt war, folgt aus (12) und (4)

$$\sum_{\nu} |Q^{\nu}| \leqq \Big(\sum_{\nu} |\omega_{\eta_\nu}| + n\Big) e^{A|x-\xi|} - n \leqq n\,(B+1)\, e^{A|x-\xi|} - n.$$

Daher ist

$$|U'_+(x)| \leqq \big(2n\,(B+1)\, e^{A|x-\xi|} + 1\big)\, AU,$$

also

$$\log \frac{U(x)}{U(\xi)} \leqq 2n\,(B+1)\,(e^{A|x-\xi|} - 1) + A\,|x-\xi|.$$

Hierin ist nach (16), (15) und (4)

$$U(\xi) = 1 + |\omega_{\eta_\mu}| + \sum_{\varkappa} |\omega_{\eta_\mu \eta_\varkappa}| \leqq B + 1,$$

also schließlich

$$U(x) \leqq (B+1)\, e^{A|x-\xi|} \exp\{2n(B+1)(e^{A|x-\xi|} - 1)\}. \tag{22}$$

(d) *Abschätzung der Ableitungen* $Y^\nu_{\eta_\mu}$. Aus (17) und (22) folgt für $|x - \xi| \leqq \alpha$

$$\begin{aligned} |Y^\nu_{\eta_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) - Y^\nu_{\eta_\mu}(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)| &\leqq A \left| \int_\xi^x U(x)\, dx \right| \\ &\leqq \frac{1}{2n} \left[\exp\{2n(B+1)(e^{A|x-\xi|} - 1)\}\right]_\xi^x \\ &\leqq \frac{1}{2n}\{\exp 2n(B+1)(e^{\beta A} - 1) - 1\}. \end{aligned}$$

Nach (5) ist die rechte Seite $< \frac{1-\varepsilon}{n}$ für eine gewisse Zahl ε, die der Ungleichung $0 < \varepsilon < 1$ genügt und von $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$ unabhängig ist. Nach der ersten Zeile von (15) besagt die gefundene Abschätzung, daß im Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$

$$\begin{cases} Y^\mu_{\eta_\mu}(x, \eta_1 \ldots, \eta_n, \lambda) > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n}, \\ |Y^\nu_{\eta_\mu}(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)| < \frac{1-\varepsilon}{n} \text{ für } \mu \neq \nu \text{ ist.} \end{cases} \tag{23}$$

Weiterhin wird stets $|x - \xi| \leqq \alpha$ vorausgesetzt.

(e) *Die Funktionaldeterminante* $\frac{\partial(Y^1, \ldots, Y^n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}$ *ist* $\neq 0$. Denn wäre sie an einer Stelle $x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$ gleich Null, d. h. wäre

$$\begin{vmatrix} Y^1_{\eta_1}, \ldots, Y^1_{\eta_n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ Y^n_{\eta_1}, \ldots, Y^n_{\eta_n} \end{vmatrix} = 0,$$

so gäbe es für diese Stelle Zahlen c_ν mit $\sum_\nu |c_\nu| > 0$, so daß

$$\sum_\nu c_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n) \tag{24}$$

ist. Es sei

$$|c_\mu| = \operatorname{Max}_\varkappa |c_\varkappa|.$$

Dann ist $c_\mu \neq 0$, und aus (24) mit $\varkappa = \mu$ würde nach (23) folgen

$$0 \geqq |c_\mu|\,|Y^\mu_{\eta_\mu}| - \sum_{\nu \neq \mu} |c_\nu|\,|Y^\nu_{\eta_\mu}| > |c_\mu|\left(1 - \frac{1-\varepsilon}{n}\right) - |c_\mu|(n-1)\frac{1-\varepsilon}{n} = \varepsilon |c_\mu|,$$

womit der gewünschte Widerspruch erreicht ist.

(f) *Für jedes feste x und λ nehmen die Funktionen $Y^1, \ldots, Y^n$ von (14) jedes Wertesystem $y_1, \ldots, y_n$ höchstens einmal an.*

Denn sind

$$\eta_1, \ldots, \eta_n \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n \tag{25}$$

zwei Wertesysteme mit $\sum |\eta_\varkappa - \bar{\eta}_\varkappa| > 0$, so gibt es eine Differenz $\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu$, so daß

$$|\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| \geqq |\eta_\varkappa - \bar{\eta}_\varkappa| \quad \text{für } \varkappa = 1, \ldots, n$$

ist. Nach dem Mittelwertsatz ist für einen passend gewählten Punkt $\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*$ auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte (25) bei Berücksichtigung von (23)

$$\begin{aligned} &|Y^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) - Y^\nu(x, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n, \lambda)| \\ &= |\sum_\mu (\eta_\mu - \bar{\eta}_\mu)\, Y^\nu_{\eta_\mu}(x, \eta_1^*, \ldots, \eta_n^*, \lambda)| \\ &\geqq |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu|\, |Y^\nu_{\eta_\nu}| - \sum_{\mu \neq \nu} |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu|\, |Y^\nu_{\eta_\mu}| \\ &\geqq |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| \left(1 - \frac{1-\varepsilon}{n} - (n-1)\frac{1-\varepsilon}{n}\right) \\ &= \varepsilon\, |\eta_\nu - \bar{\eta}_\nu| > 0, \end{aligned} \tag{26}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

(g) *Die Funktionen $Y^1, \ldots, Y^n$ nehmen für jedes x, λ auch alle Wertesysteme $y_1, \ldots, y_n$ an.*

Denn da die Funktionen für jedes System $\eta_1, \ldots, \eta_n$ im ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$ existieren, gibt es für jedes feste x, λ ein Wertesystem $y_1, \ldots, y_n$, das von ihnen angenommen wird. Gäbe es auch ein Wertesystem, das nicht angenommen wird, so gäbe es einen Grenzpunkt $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ derart, daß in jeder Umgebung dieses Punktes sowohl Wertesysteme $y_1, \ldots, y_n$ liegen, die von den Funktionen

$$Y^1(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda), \ldots, Y^n(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \tag{27}$$

angenommen werden, als auch solche Wertesysteme, die von den Funktionen (27) nicht angenommen werden. Insbesondere gibt es also eine Folge von Wertesystemen

$$\eta_{1\varrho}, \ldots, \eta_{n\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

für welche die Funktionen (27) gegen $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ konvergieren. Ist $|\eta_{\nu\varrho} - \eta_{\nu\sigma}|$ bei festem ϱ, σ die größte der Differenzen $|\eta_{\varkappa\varrho} - \eta_{\varkappa\sigma}|$, so ist nach (26)

$$|\eta_{\nu\varrho} - \eta_{\nu\sigma}| \leqq \frac{1}{\varepsilon} |Y^\nu(x, \eta_{1\varrho}, \ldots, \eta_{n\varrho}, \lambda) - Y^\nu(x, \eta_{1\sigma}, \ldots, \eta_{n\sigma}, \lambda)|.$$

Nach dem Cauchyschen Konvergenzsatz konvergiert also auch die Folge (28), etwa gegen $\bar{\eta}_1, \ldots, \eta_n$. Daher ist wegen der Stetigkeit der Y^ν

$$\bar{y}_\nu = Y^\nu(x, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n, \lambda),$$

und somit gehört der Grenzpunkt $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ zu den von den Funktionen (27) angenommenen Punkten. Da aber nach (e) die Funktionaldeterminante der Y^ν nicht Null ist, gehört dann auch eine volle Umgebung des Grenzpunktes zu den von (27) angenommenen Punkten, was der Definition des Grenzpunktes widerspricht. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(h) *Die Umkehrfunktionen zu den* Y^ν.

Aus (f) und (g) folgt, daß die Gleichungen

$$y_\nu = Y^\nu(x, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{29}$$

bei festem x und λ für jedes gegebene Wertesystem $y_1, \ldots, y_n$ eindeutig nach den $\eta_\varkappa$ auflösbar sind. Die Lösungen seien

$$\eta_\nu = \varphi^\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{30}$$

Wegen (e) und (b) haben die φ^ν stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach $x, y_1, \ldots, y_n, \lambda$.

Die φ^ν sind aber sogar k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren Argumenten.

Denn nach der Definition der φ^ν ist

$$y_\nu = Y^\nu(x, \varphi^1(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \ldots, \varphi^n(x, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \lambda) \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach y_u, x, λ:

$$e_{\mu,\nu} = \sum_\varkappa Y^\nu_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_{y_\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n), \tag{31}$$

$$0 = Y^\nu_x + \sum_\varkappa Y^\nu_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_x \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{32}$$

$$0 = \sum_\varkappa Y^\nu_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_{\lambda_\varrho} + Y^\nu_{\lambda_\varrho} \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Da nach (e) die Funktionaldeterminante der Y^ν nicht Null ist, lassen sich also die $\varphi^\varkappa_{y_u}$, $\varphi^\varkappa_x$, $\varphi^\varkappa_{\lambda_\varrho}$ als rationale Funktionen der $Y^\nu_{\eta_\varkappa}$, Y^ν_x, Y^ν_λ mit einem nicht verschwindenden Nenner darstellen. Da diese Ableitungen der Y^ν nach (b) noch $(k-1)$-mal stetig differenzierbar sind, gilt also dasselbe für die $\varphi^\varkappa_{y_\mu}$, $\varphi^\varkappa_x$, $\varphi^\varkappa_\lambda$, womit die Behauptung bewiesen ist.

(i) *Angabe des Integrals.* Mit den Funktionen (30) wird nun

$$\psi(x, \mathfrak{y}, \lambda) = Z(x, \varphi^1, \ldots, \varphi^n, \lambda), \tag{33}$$

$$\chi_\nu(x, \mathfrak{y}, \lambda) = Q^\nu(x, \varphi^1, \ldots, \varphi^n, \lambda) \tag{34}$$

gesetzt. Es soll bewiesen werden, daß ψ das gesuchte Integral ist.

Zunächst sei bemerkt, daß nach (b) und (h) ψ und die χ_ν nach allen ihren Argumenten k-mal stetig differenzierbar sind. Weiter ist

(j) $\psi_{y_\nu} = \chi_\nu$.

Denn aus (31) folgt durch Multiplikation mit ψ_{y_ν} und Summation über ν

$$\sum_\varkappa \varphi^\varkappa_{y_\mu} \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} \psi_{y_\nu} = \psi_{y_\mu}.$$

Ferner folgt aus (33)

$$\psi_{y_\mu} = \sum_\varkappa Z_{\eta_\varkappa} \varphi^\varkappa_{y_\mu},$$

also

$$\sum_\varkappa \varphi^\varkappa_{y_\mu} (Z_{\eta_\varkappa} - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} \psi_{y_\nu}) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Da nach (e) die Funktionaldeterminante der Y^ν nicht Null ist, ist auch für die inversen Funktionen $\varphi^\varkappa$ die Det $|\varphi^\varkappa_{y_\mu}| \neq 0$. Daher folgt aus den obigen linearen homogenen Gleichungen

$$Z_{\eta_\varkappa} = \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} \psi_{y_\nu}.$$

Ist auch noch

$$Z_{\eta_\varkappa} = \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} Q^\nu, \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n), \tag{35}$$

so ist daher

$$\sum_\nu Y^\nu_{\eta_\varkappa} (\psi_{y_\nu} - Q^\nu) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, n),$$

also, da die Determinante $\neq 0$ ist,

$$\psi_{y_\nu} = Q^\nu;$$

das ist aber nach (34) gerade die Behauptung (j).

Es bleibt also noch (35) zu beweisen. Dafür wird der bekannte Kunstgriff von Cauchy benutzt. Es wird

$$V(x) = Z_{\eta_\mu} - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\mu} Q^\nu$$

gesetzt. Wie schon in (c) benutzt, existieren die Ableitungen $Z_{x\eta_\mu}$, $Y^\nu_{x\eta_\mu}$ und sind stetig. Daher ist

$$V'(x) = Z_{\eta_\mu x} - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\mu x} Q^\nu - \sum_\nu Y^\nu_{\eta_\mu} Q^\nu_x.$$

Nach (18) und der dritten Zeile von (8) vereinfacht sich dieses zu

$$V'(x) = f_z V(x).$$

Durch diese Differentialgleichung und den Anfangswert $V(\xi)$ ist $V(x)$ eindeutig bestimmt. Nach (15) ist

$$V(\xi) = \omega_{\eta_\mu} - \sum_\nu e_{\mu,\nu} \omega_{\eta_\nu} = \omega_{\eta_\mu} - \omega_{\eta_\mu} = 0.$$

Daher ist $V(x) \equiv 0$, womit (35) bewiesen ist.

(k) *ψ erfüllt die Differentialgleichung* (1).

Denn nach (33) und der zweiten Zeile von (8) ist

$$\begin{aligned}\psi_x &= Z_x + \sum_\varkappa Z_{\eta_\varkappa}\varphi_x^\varkappa \\ &= f - \sum_\varkappa Q^\varkappa f_{\eta_\varkappa} + \sum_\varkappa Z_{\eta_\varkappa}\varphi_x^\varkappa,\end{aligned}$$

also nach der ersten Zeile von (8) sowie nach (35) und (32)

$$\begin{aligned}&= f + \sum_\varkappa Q^\varkappa Y_x^\varkappa + \sum_\nu Q^\nu \sum_\varkappa Y_{\eta_\varkappa}^\nu \varphi_x^\varkappa \\ &= f + \sum_\nu Q^\nu (Y_x^\nu + \sum_\varkappa Y_{\eta_\varkappa}^\nu \varphi_x^\varkappa) = f.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$f = f(x, y_1, \ldots, y_n, Z, Q^1, \ldots, Q^n, \lambda),$$

also nach (33), (34) und (j)

$$f = f(x, y_1, \ldots, y_n, \psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}, \lambda).$$

(l) *ψ erfüllt die vorgeschriebene Anfangsbedingung.*

Denn aus (14) und (33) folgt auf Grund der Bedeutung der charakteristischen Funktionen

$$\begin{aligned}Y^\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) &= \eta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \\ Z(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) &= \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda).\end{aligned}$$

Nach der ersten dieser beiden Zeilen ist daher für die in (h) eingeführten Funktionen

$$\varphi^\nu(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda) = y_\nu.$$

Aus (33) erhält man somit in der Tat

$$\begin{aligned}\psi(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda) &= Z(\xi, \varphi^1(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \ldots, \varphi^n(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda), \lambda) \\ &= Z(\xi, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \\ &= \omega(y_1, \ldots, y_n, \lambda).\end{aligned}$$

(m) *Die Differenzierbarkeit von ψ.*

Nach (i) ist ψ k-mal stetig differenzierbar nach allen $n + m + 1$ Argumenten. Dasselbe gilt für die χ_ν, d. h. nach (j) für die ψ_{y_ν}. Da nach (k)

$$\psi_x = f(x, y_1, \ldots, y_n, \psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}, \lambda)$$

ist und ψ, ψ_{y_ν} sowie f k-mal stetig differenzierbar sind, folgt hieraus, daß auch ψ_x k-mal stetig differenzierbar ist.

(n) *Eindeutige Bestimmtheit des Integrals.*

Jede zweimal stetig differenzierbare Integralfläche der Gleichung (1) läßt sich aus Charakteristiken aufbauen, die in dem ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$

existieren. Bildet man nämlich für irgendeine zweimal stetig differenzierbare Integralfläche $z = \psi(x, \mathfrak{y}, \lambda)$ und eines ihrer Flächenelemente ξ^*, $\mathfrak{y}^*$, z^*, p^*, $\mathfrak{q}^*$ die Differentialgleichungen

$$y_\nu' = -f_{q_\nu}(x, \mathfrak{y}, \psi, \psi_{y_1}, \ldots, \psi_{y_n}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{36}$$

so existiert die durch ξ^*, $\mathfrak{y}^*$ gehende Integralkurve dieses Systems wegen der Beschränktheit der f_{q_ν} in dem ganzen Intervall $|x - \xi| \leqq \alpha$. Mit diesen Funktionen $y_\nu(x)$ wird

$$z(x) = \psi(x, \mathfrak{y}(x), \lambda), \quad p(x) = \psi_x(x, \mathfrak{y}(x), \lambda), \tag{37}$$

$$q_\nu(x) = \psi_{y_\nu}(x, \mathfrak{y}(x), \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gesetzt. Dann ist

$$z'(x) = \psi_x + \sum_\varkappa \psi_{y_\varkappa} y_\varkappa' = f - \sum_\varkappa q_\varkappa f_{q_\varkappa}, \tag{38}$$

$$q_\nu'(x) = \psi_{x y_\nu} + \sum_\varkappa \psi_{y_\nu y_\varkappa} y_\varkappa'(x).$$

Aus $\psi_x = f$ folgt

$$\psi_{x y_\nu} = f_{y_\nu} + f_z \psi_{y_\nu} + \sum_\varkappa f_{q_\varkappa} \psi_{y_\varkappa y_\nu}.$$

Daher ist wegen (36)

$$q_\nu'(x) = f_{y_\nu} + f_z q_\nu. \tag{39}$$

Nach (36) bis (39) erfüllen also die $y_\nu(x)$, $z(x)$, $q_\nu(x)$ die charakteristischen Gleichungen (8), womit die Behauptung bewiesen ist.

Die charakteristischen Gleichungen sind unabhängig von der speziell betrachteten Integralfläche. Da die Integrale der charakteristischen Gleichungen durch die für die Integralfläche vorgeschriebenen Anfangswerte $z = \omega$, $q_\nu = \omega_{y_\nu}$ eindeutig bestimmt sind, gilt somit dasselbe für die Integralfläche von (1), für welche die Anfangswerte ω vorgeschrieben sind.

§ 2.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Involutionssysteme.

Es handelt sich um Systeme

$$p_\nu = f^\nu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, r); \tag{1}$$

dabei ist

$$r > 1, \quad p_\nu = \frac{\partial z}{\partial x_\nu}, \quad q_\nu = \frac{\partial z}{\partial y_\nu},$$

und es ist $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_s$ geschrieben, $\mathfrak{q}$ für $q_1, \ldots, q_s$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Die Bedingung, daß (1) ein Involutionssystem ist, besagt, daß die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$(2)\quad f^\mu_{x_\nu} + f^\mu_z f^\nu + \sum_{\varkappa=1}^{s} f^\mu_{q_\varkappa}(f^\nu_{y_\varkappa} + q_\varkappa f^\nu_z) = f^\nu_{x_\mu} + f^\nu_z f^\mu + \sum_{\varkappa=1}^{s} f^\nu_{q_\varkappa}(f^\mu_{y_\varkappa} + q_\varkappa f^\mu_z)$$
$$(\mu, \nu = 1, \ldots, r)$$

identisch in allen $r + 2s + m + 1$ Argumenten erfüllt sind und die vorkommenden Ableitungen existieren und stetig sind[8] [9]).

Satz 2. Voraussetzung. *Für fest gegebene* ξ_ν $(\nu = 1, \ldots, r)$ *existieren in dem Bereich*

$$(3)\qquad |x_\nu - \xi_\nu| \leqq a; \quad \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda^*_\mu \text{[10])}$$

die partiellen Ableitungen $f^\varrho_{y_\mu}$, f^ϱ_z, $f^\varrho_{q_\mu}$ *und sind nebst den Funktionen* $f^\varrho(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}, \lambda)$ *selber k-mal stetig differenzierbar* $(k \geqq 1)$ *nach allen*

---

[8]) Auf die Gleichungen (2) kommt man bekanntlich dadurch, daß für jede Lösung $z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ des Systems (1), die sogar zweimal stetig differenzierbar ist, $\dfrac{\partial p_\nu}{\partial x_\mu} = \dfrac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu}$ ist. Trägt man hierin die rechten Seiten von (1) ein und vereinfacht man die entstehenden Gleichungen unter nochmaliger Benutzung von (1), so erhält man die Gleichungen (2), jedoch nur als Identitäten in $x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}$ für $z = \psi$ und $q_\varkappa = \psi_{y_\varkappa}$. In diesem Sinne sind die Gleichungen (2) notwendige Bedingungen für die Existenz einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen (1). Die Integrabilitätsbedingungen (2) sind nach dem obigen Text als Identitäten in einem weitergehenden Sinne aufzufassen.

[9]) Ist allgemeiner ein implizites System von partiellen Differentialgleichungen

$$(*)\qquad F^\nu(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

für eine gesuchte Funktion $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben, so ergibt sich in ähnlicher Weise wie bei [8]), daß $z = \psi$ und $p_\varkappa = \psi_{x_\varkappa}$ auch den Gleichungen

$$(**)\qquad [F^\mu, F^\nu] = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r)$$

genügen, wo die eckige Klammer

$$[F^\mu, F^\nu] = \sum_{\varkappa=1}^{n} \{(F^\mu_{x_\varkappa} + p_\varkappa F^\mu_z) F^\nu_{p_\varkappa} - (F^\nu_{x_\varkappa} + p_\varkappa F^\nu_z) F^\mu_{p_\varkappa}\}$$

ist. Verlangt man nun wiederum, daß die Gleichungen (**) identisch in den $x_\varkappa, z, p_\varkappa$ bestehen, so liegt, wie leicht festzustellen ist, folgender Sachverhalt vor: Das System (1) ist ein Sonderfall von (*). Die für diesen Sonderfall (1) aufgestellten Integrabilitätsbedingungen (**) sind aber nur dann mit (2) identisch, wenn die f^ν von z selber nicht abhängen, d. h. wenn $f^\nu_z = 0$ ist. Liegt dieser Fall nicht vor, so erhält man die Bedingungen (2) aus (**), wenn man die Gültigkeit dieser letzteren nicht für alle Zahlensysteme $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$, sondern nur für solche fordert, welche die Gleichungen (*) erfüllen.

[10]) Diese abgeschlossenen Intervalle können auch durch halboffene oder offene Intervalle oder durch eine beliebige offene Punktmenge im λ-Raum ersetzt werden.

$r + 2s + m + 1$ *Argumenten* x_ν, y_ν, z, q_ν, λ. *Ferner sind in dem Bereich* (3) *die Integrabilitätsbedingungen* (2) *erfüllt, und es ist*

$$(4) \qquad \left\{ \begin{matrix} |f^\varrho_{x_\nu}|, |f^\varrho_{y_\nu}|, |f^\varrho_z|, |f^\varrho_{q_\nu}| \\ |f^\varrho_{y_\mu y_\nu}|, |f^\varrho_{y_\mu z}|, |f^\varrho_{y_\mu q_\nu}|, |f^\varrho_{z\,z}|, |f^\varrho_{z\,q_\nu}|, |f^\varrho_{q_\mu q_\nu}| \end{matrix} \right\} \leqq A.$$

In dem Bereich

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \qquad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda^*_\mu \text{ [10]}$$

existieren für die gegebene Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ *die partiellen Ableitungen* ω_{y_μ} *und sind nebst* ω *selber* k*-mal stetig differenzierbar nach den* y_ν *und* λ_ν; *ferner ist*

$$(5) \qquad |\omega_{y_\mu}| + \sum_\nu |\omega_{y_\mu y_\nu}| \leqq B \qquad (\mu = 1, \ldots, s).$$

Schließlich sei

$$(6) \qquad 0 < \beta < \frac{1}{rA} \log\left(1 + \frac{\log 3}{2s(B+1)}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \operatorname{Min}(a, \beta).$$

Behauptung. *Bei gegebenem* λ *hat das System* (1) *in dem Bereich*

$$(7) \qquad |x_\nu - \xi_\nu| \leqq \alpha; \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda^*_\mu \text{ [10]}$$

genau ein zweimal stetig differenzierbares Integral

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda),$$

das für $x_\nu = \xi_\nu$ die Werte

$$(8) \qquad \psi(\xi_1, \ldots, \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda)$$

annimmt. Die Funktion $\psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)$ *ist nebst den Ableitungen* ψ_{x_ν} *und* ψ_{y_ν} *in dem Bereich* (7) k*-mal stetig differenzierbar nach allen ihren* $r + s + m$ *Argumenten* $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ [11].

---

[11]) An der obigen Formulierung sind neu die explizite Angabe eines Existenzbereiches und die Aussagen über mehrmalige Differenzierbarkeit und die Abhängigkeit des Integrals von Parametern.

Ohne diese weitergehenden Aussagen ist der Satz nach verschiedenen Methoden (jedoch nicht immer einwandfrei) bewiesen worden:

(a) Beweis mit Hilfe der MAYERschen Transformation. Ein solcher Beweis ist kurz skizziert bei É. GOURSAT, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, 2. Aufl., Paris 1921, S. 38f. Eine ausführlichere Darstellung findet sich bei L. BIEBERBACH, Theorie der Differentialgleichungen, 3. Aufl., Berlin 1930, S. 308ff. Herr BIEBERBACH setzt voraus, daß die f^ν nicht von z selber abhängen, und gibt unter Berufung auf ein Beispiel an, daß die MAYERsche Methode für den Existenzbeweis versage, wenn die f^ν von z selber abhängen. Demgegenüber wird in dem obigen Text der Beweis auch für diesen allgemeinen Fall gerade mit Hilfe der

Zusatz. Die Zusätze zu Satz 1 übertragen sich auch auf den vorliegenden Fall. Insbesondere kann

$$\beta = \frac{1}{3\,r\,s\,A\,(B+1)}$$

gewählt werden.

Dem Beweis des Satzes 2 werden zwei Hilfssätze vorausgeschickt. Der erste besagt, daß ein Involutionssystem bei Substituierung neuer Veränderlicher für die x_ν wieder in ein Involutionssystem übergeht. Wird unter den nötigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

$$x_\nu = \chi^\nu(u_1, \ldots, u_t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$
$$Z(u_1, \ldots, u_t, \mathfrak{y}) = z(\chi^1, \ldots, \chi^r, \mathfrak{y})$$

gesetzt, so ist

$$Z_{u_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{r} z_{x_\varkappa} \chi^\varkappa_{u_\nu},$$

also, wenn z dem System (1) genügt,

$$Z_{u_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{r} f^\varkappa \chi^\varkappa_{u_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, t).$$

Mayerschen Methode geführt werden. Der scheinbare Widerspruch klärt sich dadurch auf, daß Herr Bieberbach auf sein Beispiel (S. 314)

$$p_1 = z + q, \qquad p_2 = z + q$$

gar nicht die Mayersche Transformation angewendet hat und seine Überlegungen daher auch nicht ihre Unbrauchbarkeit für dieses Beispiel ergeben. Im Gegenteil führt die Mayersche Transformation bei ihm durchaus zum Ziel.

Beide Autoren benutzen übrigens die Mayersche Transformation in einer unzulänglichen Form. Dazu siehe Fußnote [12]) auf S. 272.

(b) Beweis durch Schluß von $r-1$ auf r. Ist der Satz schon für $r-1$ statt r bewiesen, so sei $z = \overline{\psi}(x_1, \ldots, x_{r-1}, \mathfrak{y}, \lambda)$ ein Integral der $r-1$ ersten Gleichungen (1) mit $x_r = \xi_r$ und mit den Anfangswerten

$$\overline{\psi}(\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda).$$

Dann wird für die r-te Gleichung (1), in der jetzt $x_1, \ldots, x_{r-1}$ als Parameter angesehen werden, das Integral

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)$$

gebildet, das für $x_r = \xi_r$ die Anfangswerte

$$\psi(x_1, \ldots, x_{r-1}, \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \overline{\psi}(x_1, \ldots, x_{r-1}, \mathfrak{y}, \lambda)$$

hat, und gezeigt, daß dieses das gesuchte Integral des ganzen Systems (1) ist. Vgl. hierzu É. Goursat, a. a. O., S. 35ff. Der Beweis nach dieser Methode ist umständlicher als nach der Mayerschen Methode und liefert außerdem wesentlich ungünstigere Abschätzungen für den Existenzbereich.

(c) Beweis mit der Charakteristikentheorie für Systeme (1). Hierzu vgl. C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin 1935, S. 64ff. Über den Existenzbereich, der sich hierbei ergibt, ist nichts gesagt.

Das ist das transformierte System, von dessen rechten Seiten der folgende Hilfssatz aussagt, daß sie wieder die Integrabilitätsbedingungen erfüllen.

Hilfssatz 1. In einem Bereich $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})$ mögen die Funktionen $f^\nu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}\, z, \mathfrak{q})$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ stetig differenzierbar sein und die Integrabilitätsbedingungen (2) erfüllen. Die Funktionen

$$\chi^\nu(u_1, \ldots, u_t) \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

mögen in $\mathfrak{g}(u_1, \ldots, u_t)$ zweimal stetig differenzierbar sein und nur Punkte $x_1, \ldots, x_r$ liefern, die zu dem entsprechenden Unterbereich von $\mathfrak{G}$ gehören. Wird für $\nu = 1, \ldots, t$

$$F^\nu(u_1, \ldots, u_t, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}) = \sum_{\varkappa=1}^{r} f^\varkappa(\chi^1, \ldots, \chi^r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})\, \chi^\varkappa_{u_\nu} \tag{9}$$

gesetzt, so erfüllen auch die F^ν die Integrabilitätsbedingungen, d. h. es ist identisch in den $u_\varkappa$, $y_\varkappa$, z, $\mathfrak{q}_\varkappa$ für $\mu, \nu = 1, \ldots, t$

$$F^\mu_{u_\nu} + F^\mu_z F^\nu + \sum_{\varkappa=1}^{s} F^\mu_{\mathfrak{q}_\varkappa}(F^\nu_{y_\varkappa} + \mathfrak{q}_\varkappa F^\nu_z) = F^\nu_{u_\mu} + F^\nu_z F^\mu + \sum_{\varkappa=1}^{s} F^\nu_{\mathfrak{q}_\varkappa}(F^\mu_{y_\varkappa} + \mathfrak{q}_\varkappa F^\mu_z). \tag{10}$$

Beweis. Man drücke die auf der linken Seite von (10) vorkommenden Ableitungen auf Grund von (9) durch die Ableitungen der f^ν und χ^ν aus. Macht man dasselbe für die rechte Seite von (10), so ergibt (2) die Richtigkeit von (10).

Hilfssatz 2. Die Funktionen

$$f^\nu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q}) \qquad (\nu = 1, \ldots, r)$$

mögen in einem Bereich $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, z, \mathfrak{q})$ stetig differenzierbar sein und die Integrabilitätsbedingungen (2) erfüllen. Die Funktion $z = z(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ sei in einem Bereich $\mathfrak{g}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ stetig differenzierbar, ferner möge auch noch alle Ableitungen $z_{x_\mu y_\nu}$ und $z_{y_\mu y_\nu}$ existieren und stetig sein; schließlich genüge z der partiellen Differentialgleichung

$$z_{x_1} = f^1 \quad \text{mit} \quad q_\nu = z_{y_\nu}. \tag{11}$$

Dann genügt die Funktion

$$\zeta(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}) = z_{x_\nu} - f^\nu \tag{12}$$

der linearen Differentialgleichung

$$\zeta_{x_1} = \sum_{\sigma=1}^{s} f^1_{q_\sigma}\, \zeta_{y_\sigma} + f^1_z\, \zeta. \tag{13}$$

Beweis: Da die f^ν stetig differenzierbar sind und da auch die Ableitungen $z_{x_\mu y_\nu}$ existieren und stetig sind, folgt aus (11), daß $z_{x_\nu x_1}$ existiert

und stetig ist. Daher ist ζ nach x_1 stetig differenzierbar, und zwar erhält man aus (12)

$$\zeta_{x_1} = z_{x_\nu x_1} - f^\nu_{x_1} - f^\nu_z z_{x_1} - \sum_\sigma f^\nu_{q_\sigma} z_{y_\sigma x_1}. \tag{14}$$

Aus (11) folgt durch Differentiation nach x_ν und y_σ

$$z_{x_1 x_\nu} = f^1_{x_\nu} + f^1_z z_{x_\nu} + \sum_\sigma f^1_{q_\sigma} z_{y_\sigma x_\nu}$$

und

$$z_{x_1 y_\sigma} = f^1_{y_\sigma} + f^1_z q_\sigma + \sum_\tau f^1_{q_\tau} z_{y_\sigma y_\tau},$$

ferner aus (12)

$$z_{x_\nu y_\sigma} = \zeta_{y_\sigma} + f^\nu_{y_\sigma} + f^\nu_z q_\sigma + \sum_\tau f^\nu_{q_\tau} z_{y_\sigma y_\tau}.$$

Trägt man das in (14) ein, so erhält man

$$\zeta_{x_1} = f^1_z \zeta + \sum_\sigma f^1_{q_\sigma} \zeta_{y_\sigma} +$$
$$+ f^1_{x_\nu} + f^1_z f^\nu + \sum_\sigma f^1_{q_\sigma} (f^\nu_{y_\sigma} + f^\nu_z q_\sigma) - f^\nu_{x_1} - f^\nu_z f^1 - \sum_\sigma f^\nu_{q_\sigma} (f^1_{y_\sigma} + f^1_z q_\sigma$$

Damit ist (13) bewiesen, da die letzte Zeile nach (2) gleich 0 ist.

Beweis des Satzes 2. (A) *Der Eindeutigkeitsbeweis.* In dem Bereich (7) sei $z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)$ bei festem λ ein zweimal stetig differenzierbares Integral des Systems (1) mit den Anfangswerten (8). Die r Variabeln $x_1, \ldots, x_r$ werden nun als Funktionen von $r+1$ neuen unabhängigen Variabeln betrachtet, indem

$$x_\nu - \xi_\nu = u\, u_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{15}$$

gesetzt wird; dabei soll

$$|u| \leqq 1, \quad |u_\nu| \leqq \alpha \tag{16}$$

sein. Dann nehmen die x_ν alle Werte des Bereiches $|x_\nu - \xi_\nu| \leqq \alpha$, und zwar sogar mehrfach an[12]). Für die durch (15) gegebenen x_ν wird

$$Z(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda),$$
$$Q_\nu(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z_{y_\nu} = \psi_{y_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, r$$

[12]) Das ist die sogenannte *Mayersche Transformation.* A. Mayer selbst setzt [Math. Annalen **5** (1872), S. 458—460]

$$x_\nu - \xi_\nu = u_1 g_\nu(u_1, \ldots, u_r)$$

und wählt insbesondere S. 460

$$x_1 - \xi_1 = u_1 \quad \text{und} \quad x_\nu - \xi_\nu = u_1 u_\nu \quad \text{für } \nu > 1.$$

Ebenso verfahren spätere Autoren, wie z. B. Goursat, a. a. O., S. 38; Bieberbach a. a. O., S. 311. Dabei wird übersehen, daß man auf diese Weise keine volle Umgebung des Punktes $\xi_1, \ldots, \xi_r$ erhalten kann, da für $x_1 = \xi_1$ notwendig alle $x_\nu = \xi_\nu$ sind. Die obige allgemeinere Form der Mayerschen Transformation findet sich bei Carathéodory, a. a. O., S. 26 und für einfachere Fälle bei W. Wirtinger, Sitzungsberichte d. K. Akademie d. Wissensch. Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa **118** (1909), S. 1373 f.

gesetzt. Dann ist

$$Z_u = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho \psi_{x_\varrho} = \sum_{\varrho} u_\varrho f^\varrho, \quad Z_{u_\nu} = u \psi_{x_\nu} = u f^\nu.$$

Wird

$$\text{(17)} \quad \begin{cases} F(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s, \lambda) \\ \qquad = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho f^\varrho (x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s, \lambda), \\ F^\nu (u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s) = u f^\nu \end{cases}$$

gesetzt, so ist daher

$$\text{(18)} \quad F(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, Z, Q_1, \ldots, Q_s) = 0,$$

und Z genügt den Differentialgleichungen

$$\text{(19)} \quad \begin{cases} Z_u = F, \\ Z_{u_\nu} = F^\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, \ldots, r).$$

Ferner folgt aus der Anfangsbedingung (8)

$$\text{(20)} \quad \left.\begin{matrix} Z(0, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) \\ Z(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, \lambda) \end{matrix}\right\} = \omega(\mathfrak{y}, \lambda),$$

und offenbar ist

$$\text{(21)} \quad \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda).$$

Die eindeutige Bestimmtheit von ψ besagt also dasselbe wie die eindeutige Bestimmtheit von $Z(1, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda)$ für $|u_r| \leqq \alpha$. Für den Nachweis dieser benötigt man von den Gleichungen (19) und (20) jeweils nur die erste Zeile. Die erste Zeile von (19) ist, wenn neben den λ auch noch $u_1, \ldots, u_r$ als Parameter angesehen werden, eine Differentialgleichung von der in § 1 behandelten Art. Die dort auftretenden Größen a, A, α, β mögen jetzt mit a^*, A^*, α^*, β^* bezeichnet werden. Wegen (16) und (4) ist dann $A^* \leqq r \alpha A$, und das ist $\leqq r \beta A$ nach dem zweiten Teil von (6). Es kann also $A^* = r \beta A$ gewählt werden. Nach dem ersten Teil von (16) ist $a^* = 1$. Die Ungleichung (5) des § 1 für β^* lautet dann

$$0 < \beta^* < \frac{1}{r \beta A} \log\left(1 + \frac{\log 3}{2 n (B+1)}\right).$$

Hierin ist nach (6) die rechte Seite > 1, so daß $\beta^* = 1$ gewählt werden kann. Damit ergibt sich aus dem zweiten Teil von § 1 (5), daß $\alpha^* = 1$ ist. Der Satz 1 ergibt somit, daß Z durch die ersten Zeilen von (19) und (20) für $|u| \leqq 1$ eindeutig bestimmt ist; insbesondere gilt das also auch für (21) im Bereich (7).

(B) *Der Existenzbeweis.* Es werden wieder die Funktionen (17) und mit diesen die Gleichungen (19) gebildet. Dieses Gleichungssystem ist nach dem Hilfssatz 1 wieder ein Involutionssystem.

Zunächst wird die Gleichung der ersten Zeile von (19) für sich behandelt, wobei neben den λ auch noch $u_1, \ldots, u_r$ als Parameter angesehen werden. Auf diese Gleichung ist wieder der Satz 1 anwendbar und ergibt die Existenz eines Integrals

$$Z = \Psi(u, \mathfrak{y}; u_1, \ldots, u_r, \lambda),$$

das die erste Zeile von (20) erfüllt. Wie oben ergibt sich weiter, daß dieses Integral für

$$|u| \leqq 1, \quad |u_\nu| \leqq \alpha$$

existiert. Weiter ergibt der Satz 1, daß Ψ, Ψ_u, Ψ_{y_ν} nach u, $y_\varkappa$, $u_\varkappa$, λ k-mal stetig differenzierbar ist.

Es wird nun behauptet, daß

$$\psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \Psi(1, \mathfrak{y}; x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \lambda)$$

das gesuchte Integral des Systems (1) ist.

Wegen (18) folgt aus der ersten Zeile von (19), daß $Z_u = 0$ für $u_1 = \cdots = u_r = 0$ ist, also ist $Z = \Psi$ bei festem $\mathfrak{y}$, λ und $u_\varkappa = 0$ von x unabhängig. Wegen der ersten Zeile von (20) erfüllt daher $Z = \Psi$ auch die zweite Zeile von (20), d. h. ψ erfüllt die Anfangsbedingung (8). Erfüllt Ψ auch noch die Gleichungen der zweiten Zeile von (19), so ergibt sich aus diesen für $u = 1$, daß ψ das System (1) erfüllt. Aus der k-maligen Differenzierbarkeit von Ψ und den Ψ_{y_ν} folgt, daß auch ψ und die ψ_{y_ν} k-mal nach den $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $\ldots$ stetig differenzierbar sind. Da die f^ν nach allen ihren Argumenten k-mal stetig differenzierbar sind, folgt somit aus den Gleichungen (1) nach Eintragung von ψ, daß auch die ψ_{x_ν} k-mal stetig differenzierbar nach allen ihren Argumenten sind.

Es ist also in der Tat nur noch zu beweisen, daß $Z = \Psi$ die Gleichungen der zweiten Zeile von (19) erfüllt. Das ergibt sich aber so: Da, wie am Anfang von (B) bemerkt, auch für das System (19) die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind und da Z der ersten Zeile von (19) genügt, ist nach Hilfssatz 2 für

$$\zeta(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z_{u_\nu} - F^\nu$$

die Gleichung

$$\zeta_u = \sum_{\sigma=1}^{s} F_{Q_\sigma} \zeta_{y_\sigma} + F_z \zeta \tag{22}$$

erfüllt. Das ist nach Eintragung von Ψ, $\Psi_{u_\varkappa}$, $\Psi_{y_\varkappa}$ eine lineare Differentialgleichung für ζ. Nach (17) ist $F^\nu = 0$ für $u = 0$. Ferner ist für $u = 0$

$$Z_{u_\nu} = \frac{\partial}{\partial u_\nu} \omega(\mathfrak{y}, \lambda) = 0,$$

also

$$\zeta(0, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = 0.$$

Eine Lösung von (22) mit diesem Anfangswert ist offenbar $\zeta = 0$. Da die Lösungen von (22) nach Satz 3 durch die Anfangswerte eindeutig bestimmt sind, ist also $\zeta \equiv 0$, d. h. $Z = \psi$ erfüllt auch die Gleichungen der zweiten Zeile von (19).

§ 3.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für eine lineare Differentialgleichung.

Es handelt sich um eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f^{\nu}(x, \mathfrak{y}, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = f^0(x, \mathfrak{y}, \lambda)\, z + g(x, \mathfrak{y}, \lambda), \tag{1}$$

wobei wieder $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_n$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ geschrieben ist; die $\lambda_\varkappa$ sind Parameter.

Satz 3. Voraussetzung. *In dem Bereich*

$$a \leqq x \leqq b; \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [13]}$$

sind die f^ν für $\nu \geqq 1$ bei festem λ beschränkt [14]*, alle f^ν und g sind stetig und die partiellen Ableitungen*

$$f^\nu_{y_\varkappa},\ g_{y_\varkappa},\ f^\nu_{\lambda_\varkappa},\ g_{\lambda_\varkappa}$$

existieren und sind stetig; schließlich sind diese Ableitungen noch $(k-1)$-mal ($k \geqq 1$) stetig differenzierbar nach allen $m + n + 1$ Argumenten x, y_ϱ, λ_ϱ.

Die Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ ist im Bereich

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [13]}$$

nach allen $m + n$ Argumenten k-mal stetig differenzierbar.

Behauptung. *Für beliebige ξ, λ aus den Intervallen*

$$a \leqq \xi \leqq b, \quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \text{ [13]}$$

hat die Differentialgleichung (1) in dem Bereich

$$a \leqq x \leqq b, \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

genau ein Integral

$$z = \psi(x, \mathfrak{y}; \xi, \lambda)$$

mit dem Anfangswert

$$\psi(\xi, \mathfrak{y}; \xi, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda). \tag{2}$$

---

[13]) Hier gilt wieder die Fußnote [3]) von S. 257.

[14]) Diese Voraussetzung kann auch durch folgende ersetzt werden: Bei festem λ sind die partiellen Ableitungen $f^\nu_{y_\varkappa}$ für $\nu \geqq 1$ beschränkt.

Dieses Integral ist in dem Bereich

$$a \leqq x,\ \xi \leqq b,\quad \mathfrak{y}\ \textit{beliebig},\quad \Lambda_\mu \leqq \lambda_\mu \leqq \Lambda_\mu^* \tag{3}$$

k-mal stetig differenzierbar nach allen $m + n + 2$ *Argumenten* x, ξ, $y_\varkappa$, λ

Sind

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, \tag{4}$$

die charakteristischen Funktionen[15]) *des Differentialgleichungssystems*

$$y'(x) = f^\nu(x, \mathfrak{y}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n \tag{5}$$

so ist das Integral durch die Parameterdarstellung

$$\begin{cases} y_\nu = \varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) & (\nu = 1, \ldots, n \\ z = e^F \{\omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) + \int_\xi^x g(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda)\, e^{-F}\, dx\} \end{cases} \tag{6}$$

mit

$$F = F(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = \int_\xi^x f^0(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda)\, dx$$

und den Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_n$ *gegeben*[16]).

Beweis. Das Integral wird nach der klassischen Methode konstruier indem durch jeden Punkt

$$\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) \tag{7}$$

eine Charakteristik der partiellen Differentialgleichung (1) gelegt und gezeig wird, daß sich diese Charakteristiken bei festem ξ zu einer Integralfläche zu sammenschließen.

Für die partielle Differentialgleichung (1) bestehen die charakteristische Gleichungen aus dem System (5) und der Gleichung

$$z'(x) = f^0(x, \mathfrak{y}, \lambda)\, z + g(x, \mathfrak{y}, \lambda). \tag{8}$$

---

[15]) D. h. die Integralkurven von (5), die durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ gehe

[16]) Gewöhnlich beschränkt man sich auf eine homogene Differentialgleichung (1 d. h. auf den Fall, daß $f^0 \equiv g \equiv 0$ ist. Dann ist der Satz vollständig in dem Fundamenta satz über charakteristische Funktionen enthalten. Weiter geht man nun sofort z quasilinearen Differentialgleichungen über. Die größere Allgemeinheit der Differentia gleichung bedingt dann eine stärkere Einschränkung des Existenzbereiches; vgl. daz etwa Ka. DGlen 1930, S. 335ff. und Важewski, Annales des la Société Polonaise Math matique 12 (1934), S. 6—15. Bei allgemeinen linearen Differentialgleichungen, d gewöhnlich gar nicht behandelt werden, sind solche Einschränkungen nicht nöti Gerade das wird aber bisweilen gebraucht; vgl. z. B. den Schluß von § 2.

Das System (5) läßt sich gesondert behandeln; seine Lösungen sind die Funktionen (4). Diese existieren in dem Bereich (3). Denn bei festem λ sind die Funktionen f^ν für $\nu \geqq 1$ beschränkt, etwa $|f^\nu| \leqq A$. Daher folgt aus (5) $|y_\nu'| \leqq A$, und hieraus, daß jede einzelne Integralkurve des Systems (5) beschränkte Ordinaten y hat[17]). Da die Integralkurve nach beiden Seiten an den Rand des Bereiches

$$a \leqq x \leqq b, \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

herankommen muß, in dem die f^ν stetig sind, kann das daher nur so geschehen, daß sie an den linken und rechten Rand gelangt. Sie existiert also bei beliebigem $a \leqq \xi \leqq b$ und beliebigen $\eta_1, \ldots, \eta_n$, λ in dem ganzen Intervall $\ldots \leqq x \leqq b$, d. h. die Funktionen (4) existieren in dem ganzen Bereich (3). Ferner sind sie dort nach allen $m + n + 2$ Argumenten k-mal stetig differenzierbar[18]).

Werden die Funktionen (4) in die Gleichung (8) eingetragen, so erhält man aus dieser Gleichung für die durch den Punkt (7) gehende Charakteristik auch noch die letzte der Gleichungen (6).

Die rechten Seiten der Gleichungen (6) sind nach dem Vorangehenden und den Voraussetzungen über die f^ν und g k-mal stetig differenzierbar nach $x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda$. Die n Gleichungen der ersten Zeile von (6) sind für beliebige $y_1, \ldots, y_1$ eindeutig nach $\eta_1, \ldots, \eta_n$ auflösbar, und zwar ergibt sich aus der Bedeutung der Funktionen φ_ν

$$\eta_\nu = \varphi_\nu(\xi, x, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

---

[17]) Gilt statt der Beschränktheit der f^ν die auf S. 275, Fußnote [14]) angegebene Voraussetzung, so ergibt sich das folgendermaßen: Es sei etwa $|f^\nu_{y_\varkappa}| \leqq A$ für $\nu \geqq 1$. Nach dem Mittelwertsatz ist dann

$$|f^\nu(x, \mathfrak{y}, \lambda) - f^\nu(x, 0, \lambda)| \leqq A \sum_{\varkappa=1}^{n} |y_\varkappa|.$$

Da die $f^\nu(x, 0, \lambda)$ im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetig sind, sind sie dort bei festem λ beschränkt, etwa dem absoluten Betrage nach $\leqq B$, so daß

$$|f^\nu(x, \mathfrak{y}, \lambda)| \leqq A \sum_{\varkappa} |y_\varkappa| + B$$

ist. Aus (5) folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_\varkappa'(x)| \leqq nA \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu| + nB,$$

und hieraus nach Ka, DGlen 1930, S. 155

$$\Sigma |y_\nu| \leqq \left(\Sigma |\eta_\nu| + \frac{B}{A}\right) e^{nA(b-a)}.$$

[18]) Vgl. Fußnote [5]) auf S. 259.

Trägt man dieses in die zweite Zeile von (6) ein, so wird daraus eine Funktio

$$z = \psi(x, \mathfrak{y};\ \xi, \lambda),$$

die in dem Bereich (3) nach allen ihren Argumenten k-mal stetig differenzierb ist und für $x = \xi$ den Wert (2) hat. Sie ist also die gesuchte Integralfläch wenn durch jeden ihrer Punkte eine Charakteristik von (1) geht, die d Fläche angehört; so ist diese aber gerade konstruiert.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es bei festem ξ, λ nur *eine* Integralfläch mit dem Anfangswert (2) gibt. Es sei $z = \psi$ eine derartige Integralfläche un $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, z_0$ ein beliebiger Punkt dieser Fläche. Die durch den Punk $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ gehende Integralkurve

$$y_\nu = \varphi_\nu(x, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n \tag{9}$$

des Systems (5) ist unabhängig von z_0 eindeutig bestimmt und existiert, w oben gezeigt, im ganzen Intervall $a \leqq x \leqq b$. Für die Funktionen (9) wir

$$\chi(x) = \psi(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \xi, \lambda) \tag{10}$$

gesetzt, so daß also

$$\chi(x_0) = \psi(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}; \xi, \lambda) = z_0$$

ist. Aus (10) folgt, da die φ_ν dem System (5) genügen,

$$\chi'(x) = \psi_x + \sum_\nu \psi_{y_\nu} \varphi_\nu'(x) = \psi_x + \sum_\nu \psi_{y_\nu} f^\nu,$$

also, da ψ ein Integral von (1) ist,

$$\chi'(x) = f^0 \chi + g, \tag{11}$$

wobei für die y_ν die Größen (9) einzutragen sind. Die Funktionen (9) und (1 bilden also eine Charakteristik der Differentialgleichung (1), und zwar ein solche, die der Integralfläche angehört. Wird

$$\eta_\nu = \varphi_\nu(\xi, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}, \lambda) \qquad (\nu = 1, \ldots, n$$

gesetzt, so muß daher

$$\chi(\xi) = \omega(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)$$

sein. Durch diesen Anfangswert und die Gleichung (11) ist $\chi(x)$ unabhängi von dem Integral $z = \psi$ ebenfalls eindeutig bestimmt, insbesondere ist als $z_0 = \chi(x_0)$ eindeutig bestimmt.

§ 4.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz für explizite lineare Involutionssysteme.

Es handelt sich um Systeme

$$(1)\quad \frac{\partial z}{\partial x_\mu} = \sum_{\sigma=1}^{s} f^{\mu\sigma}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)\frac{\partial z}{\partial y_\sigma} + f^{\mu 0}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda)\, z + g^\mu(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) \quad (\mu = 1, \ldots, r);$$

dabei ist $r > 1$, und es ist wieder $\mathfrak{y}$ für $y_1, \ldots, y_s$ und λ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ geschrieben.

Haben die Koeffizienten $f^{\mu\sigma}$, g^μ in einem Gebiet $\mathfrak{G}(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y})$ bei festem λ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so erfüllt jede stetig differenzierbare Lösung des Systems (1) auch die Gleichungen [19])

$$\sum_{\varrho=1}^{s}\Big\{\sum_{\sigma=1}^{s}(f^{\mu\varrho}_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - f^{\nu\varrho}_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) - f^{\mu\varrho}_{x_\nu} + f^{\nu\varrho}_{x_\mu}\Big\}\frac{\partial z}{\partial y_\varrho} + \Big\{\sum_{\sigma=1}^{s}(f^{\mu 0}_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - f^{\nu 0}_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) - f^{\mu 0}_{x_\nu} + f^{\nu 0}_{x_\mu}\Big\} z + \sum_{\sigma=1}^{s}(g^\mu_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - g^\nu_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) - g^\mu_{x_\nu} + g^\nu_{x_\mu} - f^{\mu 0} g^\nu + f^{\nu 0} g^\mu = 0$$
$$(\mu, \nu = 1, \ldots, r).$$

Sind diese Gleichungen für beliebige Funktionen z erfüllt, d. h. sind die sogenannten Integrabilitätsbedingungen

$$(2)\quad \begin{cases} \sum_{\sigma=1}^{s}(f^{\mu\varrho}_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - f^{\nu\varrho}_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) = f^{\mu\varrho}_{x_\nu} - f^{\nu\varrho}_{x_\mu} \\ \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r;\ \varrho = 0, 1, \ldots, s) \\ \sum_{\sigma=1}^{s}(g^\mu_{y_\sigma} f^{\nu\sigma} - g^\nu_{y_\sigma} f^{\mu\sigma}) = g^\mu_{x_\nu} - g^\nu_{x_\mu} + f^{\mu 0} g^\nu - f^{\nu 0} g^\mu \\ \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, r) \end{cases}$$

erfüllt, so heißt das System (1) ein Involutionssystem. Involutionssysteme in diesem Sinne sind auch Involutionssysteme im Sinne von § 2.

---

[19]) Für zweimal stetig differenzierbare Lösungen z ergibt sich das daraus, daß $\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$ ist. Trägt man hierin für $\frac{\partial z}{\partial x_\nu}$ und $\frac{\partial z}{\partial x_\mu}$ die rechten Seiten von (1) ein, so erhält man die obigen Gleichungen, wenn man die Gleichungen (1) nochmals berücksichtigt. Für Lösungen z, die nur einmal stetig differenzierbar sind, ist das obige Ergebnis im Falle $f^{\mu 0} = g^\mu \equiv 0$ zuerst von E. Schmidt [Monatshefte für Mathematik und Physik **48** (1939), S. 426–432] bewiesen. Einen einfacheren Beweis hat O. Perron [Math. Annalen **117** (1941), S. 687–693] gegeben. Dieser Beweis läßt sich nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Perron auch auf den allgemeineren Fall der Gleichung (1) ausdehnen.

Satz 4. Voraussetzung. *In dem Bereich*

$$a_\mu \leqq x_\mu \leqq b_\mu \ (\mu = 1, \ldots, r); \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}; \quad \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^* \tag{3}$$

[20])

sind die $f^{\mu\sigma}$ *für* $\sigma > 1$ *bei festem* λ *beschränkt*[21]), *alle* $f^{\mu\sigma}$ *und* g^μ *sind k-mal stetig differenzierbar* ($k \geqq 1$) *nach allen* $r + s + m$ *Argumenten* $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$. *Schließlich sind die Integrabilitätsbedingungen* (2) *erfüllt.*

Die Funktion $\omega(\mathfrak{y}, \lambda)$ *ist im Bereich*

$$\mathfrak{y} \text{ beliebig}, \quad \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^* \text{ [20])}$$

nach allen $m + s$ *Argumenten k-mal stetig differenzierbar.*

Behauptung. *Für beliebige* ξ_μ, λ *aus den Intervallen*

$$a_\mu \leqq \xi_\mu \leqq b_\mu, \quad \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^* \text{ [20])}$$

hat das Differentialgleichungssystem (1) *in dem Bereich*

$$a_\mu \leqq x_\mu \leqq b_\mu \ (\mu = 1, \ldots, r), \quad \mathfrak{y} \text{ beliebig}$$

genau ein Integral

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) \tag{4}$$

mit den Anfangswerten

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \omega(\mathfrak{y}, \lambda). \tag{5}$$

Dieses Integral ist in dem Bereich (3) *nach allen* $r + s + m$ *Argumenten* $x_\varkappa$, $y_\varkappa$, $\lambda_\varkappa$ *k-mal stetig differenzierbar.*

Beweis. Man kann genau nach dem Muster des Beweises zu Satz 2 verfahren.

(A) *Eindeutigkeitsbeweis.* Es sei (4) ein Integral des Systems (1) mit den Anfangswerten (5). Für $r + 1$ unabhängige Veränderliche $u, u_1, \ldots, u_r$ innerhalb der Intervalle

$$0 \leqq u \leqq 1, \ a_\mu - \xi_\mu \leqq u_\mu \leqq b_\mu - \xi_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r)$$

wird

$$x_\mu = \xi_\mu + u\, u_\mu$$

gesetzt. Dann nehmen die x_μ alle Werte innerhalb des durch die ersten Ungleichungen von (3) gegebenen Bereiches an. Weiter wird für diese x_μ

$$Z(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda),$$

$$Q_\nu(u, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z_{y_\nu} = \psi_{y_\nu}$$

---

[20]) Hier gilt wieder die Fußnote [3]) von S. 257.

[21]) Diese Voraussetzung kann durch die folgende ersetzt werden: Bei festem λ sind die Ableitungen $f^{\mu\sigma}_{y_\varrho}$ für $\sigma > 1$ beschränkt.

gesetzt. Dann ist

$$Z_u = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho \psi_{x_\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho \Big(\sum_{\sigma=1}^{s} f^{\varrho\sigma} Z_{y_\sigma} + f^{\varrho 0} Z + g^\varrho \Big),$$

$$Z_{v_\mu} = u\, \psi_{x_\mu} = u \Big(\sum_{\sigma=1}^{s} f^{\mu\sigma} Z_{y_\sigma} + f^{\mu 0} Z + g^\mu \Big).$$

Wird

$$(6) \qquad \begin{cases} F^\sigma = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho f^{\varrho\sigma} \ (\sigma = 0, \ldots, s), & G = \sum_{\varrho=1}^{r} u_\varrho g^\varrho, \\ F^{\mu\sigma} = u f^{\mu\sigma} \qquad (\sigma = 0, \ldots, s), & G^\mu = u g^\mu \end{cases}$$

gesetzt, so ist daher

$$(7) \qquad F^\sigma(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, \lambda) = 0, \quad G(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, \lambda) = 0$$

und Z genügt den linearen Differentialgleichungen

$$(8) \qquad \begin{cases} Z_u = \sum_{\sigma=1}^{s} F^\sigma Z_{y_\sigma} + F^0 Z + G, \\ Z_{v_\mu} = \sum_{\sigma=1}^{s} F^{\mu\sigma} Z_{y_\sigma} + F^{\mu\sigma} Z + G^\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, r). \end{cases}$$

Ferner ergeben die Anfangsbedingungen

$$(9) \qquad \left.\begin{matrix} Z(0, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda) \\ Z(u, 0, \ldots, 0, \mathfrak{y}, \lambda) \end{matrix}\right\} = \omega(\mathfrak{y}, \lambda),$$

und offenbar ist

$$(10) \qquad \psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) = Z(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \mathfrak{y}, \lambda).$$

Die eindeutige Bestimmtheit von ψ besagt daher dasselbe wie die eindeutige Bestimmtheit von $Z(1, u_1, \ldots, u_r, \mathfrak{y}, \lambda)$ für $a_\mu - \xi_\mu \leqq u_\mu \leqq b_u - \xi_\mu$.

Für den Beweis dieser letzten Tatsache werden von den Gleichungen (8) und (9) jeweils nur die ersten Zeilen gebraucht. Die erste Zeile von (8) kann als eine partielle lineare Differentialgleichung für eine Funktion Z angesehen werden, die von den unabhängigen Veränderlichen u und $y_\varkappa$ und von den Parametern $u_\varkappa$ und λ abhängt. Aus dem Satz 3 folgt dann, daß die Funktion Z durch die in der ersten Zeile von (9) stehende Anfangsbedingung eindeutig bestimmt ist; insbesondere gilt das also für die Funktion (10).

(B) *Existenzbeweis.* Es werden wieder die Funktionen (6) und mit diesen das Gleichungssystem (8) gebildet. Dieses ist nach dem Hilfssatz 1 von § 2 ebenfalls ein Involutionssystem.

Zunächst wird die Differentialgleichung der ersten Zeile von (8) für sich betrachtet. In ihr werden u, y_1, ..., y_s als unabhängige Veränderliche und

$u_1, \ldots, u_r, \lambda$ als Parameter behandelt. Auf die Differentialgleichung ist der Satz 3 anwendbar und ergibt die Existenz eines Integrals

$$Z = \Psi(u, \mathfrak{y}; u_1, \ldots, u_r, \lambda),$$

das die erste Zeile von (9) erfüllt, und zwar in dem Bereich

$$0 \leqq u \leqq 1,\ a_\mu - \xi_\mu \leqq u_\mu \leqq b_\mu - \xi_\mu,\ \mathfrak{y} \text{ beliebig}, \Lambda_\varkappa \leqq \lambda_\varkappa \leqq \Lambda_\varkappa^*,$$

und weiter, daß dieses Integral k-mal stetig differenzierbar nach allen $r + s + m + 1$ Argumenten ist. Wegen (7) folgt aus der ersten Zeile von (8) $Z_u = 0$ für $u_1 = \cdots = u_r = 0$, also ist $\Psi(u, \mathfrak{y}; 0, \ldots, 0, \lambda)$ bei festen $y_\varkappa, \lambda$ von u unabhängig. Wegen der ersten Zeile von (9) erfüllt daher Ψ auch die zweite Zeile von (9).

Wie am Ende von § 2 ergibt sich nun auch hier, daß

$$\psi(x_1, \ldots, x_r, \mathfrak{y}, \lambda) = \Psi(1, \mathfrak{y}; x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, \lambda)$$

das gesuchte Integral ist.

§ 5.

Zu der Bildung vollständiger Systeme von homogenen linearen Differentialgleichungen.

Es sei das System von homogenen linearen Differentialgleichungen in nicht aufgelöster Form

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} f^{\mu k}(\mathfrak{x}) \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

gegeben, wobei $\mathfrak{x}$ für $x_1, \ldots, x_n$ geschrieben und $z = z(\mathfrak{x})$ die gesuchte Funktion ist.

Haben die Koeffizienten $f^{\mu k}$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung, so erfüllt jede stetig differenzierbare Lösung des Systems die Gleichungen[22])

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{n} \left(f^{\mu k}_{x_\varrho} f^{\nu \varrho} - f^{\nu k}_{x_\varrho} f^{\mu \varrho}\right) \frac{\partial z}{\partial x_k} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots m).$$

Auf Grund dieser Tatsache finden sich in der Literatur — und zwar, soweit mir bekannt ausnahmslos[23]) — Ausführungen etwa folgender Art:

[22]) Für den Beweis s. Fußnote [19]) auf S. 279.

[23]) Es seien etwa genannt: SERRET-SCHEFFERS, Differential- und Integralrechnung, Bd. 3, 6. Aufl., Leipzig und Berlin 1924, S. 566ff. É. GOURSAT, a. a. O., S. 65ff. CARATHÉODORY, a. a. O., S. 33.

Man streiche diejenigen Gleichungen des Systems (1), die sich aus den übrigen linear komponieren lassen. D. h. es ist die ν-te Gleichung zu streichen, wenn für gewisse Funktionen $\lambda_\mu(x)$

$$f^{\nu k}(x) = \sum_{\mu \neq \nu} \lambda_\mu(x) f^{\mu k}(x) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

ist. In der Tat liefert dann die ν-te Zeile keinen Beitrag zur Bestimmung der Lösung des Systems und kann daher gestrichen werden.

In dieser Weise sei das System (1) bereits auf die geringste Anzahl von Gleichungen reduziert. Ist nun weiter auch jede der Gleichungen (2) eine lineare Komposition der Gleichungen (1), so heißt das System (1) vollständig. Sind dagegen einzelne der Gleichungen (2) von den Gleichungen (1) linear unabhängig, so füge man sie zu dem System (1) hinzu. Es entsteht dann ein System von m_1 Gleichungen, bei dem, wenn die $f^{\mu k}$ hinreichend oft stetig differenzierbar sind, das eben geschilderte Verfahren wiederholt wird. D. h. es werden zu diesem neuen System wieder alle Gleichungen (2) gebildet. Entweder zeigt sich dann, daß das System der m_1 Gleichungen vollständig ist, oder einzelne der neuen Gleichungen (2) sind von den m_1 Gleichungen linear unabhängig. Diese werden dann zu den m_1 Gleichungen hinzugefügt. In dieser Weise fährt man fort. Es wird geschlossen, daß nach endlich vielen Schritten ein vollständiges System gewonnen ist und daß dieses aus höchstens n Gleichungen besteht. Zur Begründung wird angegeben, daß in jeder Matrix

$$\begin{pmatrix} f^{11}, \ldots, f^{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f^{m1}, \ldots, f^{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

die Zeilen voneinander linear abhängig sind, wenn der Rang der Matrix $< m$ ist, und dieser Fall liegt offenbar immer vor, wenn $m > n$ ist.

Es ist richtig, daß in der Matrix (3), wenn ihr Rang an jeder Stelle des betrachteten Gebietes $\mathfrak{G}$ kleiner als m ist, die Zeilen voneinander linear abhängig sind, d. h. daß es dann Funktionen $\lambda_\mu(x)$ gibt, so daß im ganzen Gebiet $\sum |\lambda_\mu| > 0$ und

$$\sum_\mu \lambda_\mu f^{\mu k} = 0 \quad \text{für } k = 1, \ldots, n$$

ist. Aber daraus kann man nicht schließen, daß nun eine Zeile von (3) und damit von (1) sich in dem ganzen Gebiet $\mathfrak{G}$ oder auch nur in einer hinreichend kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{G}$ aus den übrigen Zeilen linear komponieren läßt.

Z. B. hat für $m = n = 2$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$$

überall einen Rang < 2, wenn — es ist $x_1 = x$, $x_2 = y$ gesetzt —

$$f^{11} = |x|^3 + x^3, \quad f^{12} = |y|^3 + y^3,$$
$$f^{21} = |y|^3 - y^3, \quad f^{22} = |x|^3 - x^3$$

ist. Für $x > 0$, $y > 0$ lautet die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2x^3 & 2y^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d. h. die zweite Zeile und nur diese Zeile des Differentialgleichungssystems kann gestrichen werden. Für $x < 0$, $y < 0$ lautet die Matrix dagegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2y^3 & 2x^3 \end{pmatrix},$$

d. h. jetzt darf die erste Zeile und nur diese gestrichen werden. Betrachtet man die Matrix und das zugehörige Differentialgleichungssystem in der ganzen x, y-Ebene oder, um singuläre Stellen zu vermeiden, in der längs der negativen y-Achse aufgeschnittenen Ebene, so kann also, obwohl der Rang überall < 2 ist, das System nicht durch Streichen einer Zeile reduziert werden.

Dem Verfahren zur Bildung reduzierter vollständiger Systeme und den begleitenden Behauptungen kommt hiernach keine Allgemeingültigkeit zu, wenn das Verfahren auch bei speziellen Beispielen von großem Nutzen sein kann.

(Eingegangen am 14. Dezember 1942.)

Zur Geometrie der Zahlen.

Von

Edmund Hlawka in Wien.

§ 1.

Einleitung.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich stets auf den n-dimensionalen euklidischen Raum R_n. Zugrunde gelegt wird ein orthogonales Koordinatensystem. Der Punkt mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ wird mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet. Sind die Koordinaten alle ganzzahlig, so bezeichnen wir sie mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{r}$. Es sei $n \geqq 2$.

Wir betrachten nun im R_n einen konvexen Körper K mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung $\mathfrak{o}$. Seine Distanzfunktion sei $f(\mathfrak{x})$. Diese ist bekanntlich homogen vom ersten Grad, symmetrisch in bezug auf $\mathfrak{o}$ und sie erfüllt die Ungleichung

$$f(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) \leqq f(\mathfrak{x}) + f(\mathfrak{y}). \tag{a}$$

Dann lautet der Fundamentalsatz von Minkowski*) [1]: Besitzt K ein Volumen $V \geqq 2^n$, so liegt in K mindestens ein von $\mathfrak{o}$ verschiedenes Gitterpunktpaar $\pm \mathfrak{g}$ oder anders ausgesprochen: Es gibt zu jeder Zahl $M_h \geqq \left(\frac{V}{J}\right)^{\frac{1}{n}}$ ein $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$, so daß

$$f(\mathfrak{g}) \leqq M_h. \tag{b}$$

Dabei ist J das Volumen des Eichkörpers $f(\mathfrak{x}) = 1$. Man sieht sofort, daß es konvexe Körper gibt mit einem Volumen $V < 2^n$, ja bei denen sogar $V \leqq \varepsilon$ ist ($\varepsilon > 0$, sonst aber beliebig) und trotzdem (b) gilt. Betrachten wir z. B. das Parallelepiped $P: |x_1| \leqq \frac{\varepsilon}{2 \cdot 4^{n-1}}$, $|x_i| \leqq 2$ $(i = 2, \ldots, n)$, dessen Volumen $V = \varepsilon$ ist und welches den Gitterpunkt mit den Koordinaten $g_1 = 0$, $g_2 = \cdots = g_n = 1$ enthält. Die Sache wird aber anders, wenn wir mit Minkowski die Klasse $\Gamma(K)$ aller konvexen Körper betrachten, die aus K durch volumentreue affine Transformationen, bei denen $\mathfrak{o}$ festbleibt, hervorgehen. Von dieser Klasse $\Gamma(K)$ hat Minkowski folgendes behauptet: Ist

*) Die eckigen Klammern verweisen auf das Schriftenverzeichnis am Ende der Arbeit.

das Volumen $V < 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, so gibt es in $\Gamma(K)$ stets einen konvexen Körper K', der außer $\mathfrak{o}$ keine weiteren Gitterpunkte mehr enthält oder anders ausgesprochen: Es gibt stets eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$, so daß für alle $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$

$$f(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) > \left(\frac{V}{J}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Dabei ist es nicht notwendig vorauszusetzen, daß die Distanzfunktion von K die Eigenschaft (a) besitzt. Man nennt solche Körper Strahlkörper. Minkowski hat für diesen Satz keinen Beweis veröffentlicht und es ist auch seither, soviel ich weiß, keiner veröffentlicht worden. Es ist mir nun gelungen, einen Beweis dafür zu erbringen, indem ich zunächst in § 2 folgenden Satz (Deformationssatz) beweise: Ist M eine beschränkte, im Jordanschen Sinne meßbare Menge und $\varphi(\mathfrak{x})$ eine auf M definierte beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq \int_M \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + \varepsilon$$

ist. Dabei erstreckt sich die Summe links über alle Gitterpunkte $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$. Aus diesem Satz wird dann in § 3 die Behauptung von Minkowski hergeleitet.

Wir haben bis jetzt das homogene Problem (b) betrachtet. Das inhomogene Problem besteht darin, eine Zahl M_J so zu bestimmen, so daß es zu jedem $\mathfrak{x}_0$ des R_n wenigstens ein $\mathfrak{g}$ gibt, wobei jetzt auch $\mathfrak{o}$ zugelassen wird, so daß

$$f(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}_0) \leqq M_J$$

wird. M_J hängt im Gegensatz zu M_n nicht vom Volumen V von K ab; z. B. gibt es keinen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$, so daß das Parallelepiped

$$|x_1 + g_1| \leqq \frac{1}{4}, \quad |x_2 + g_2| \leqq V, \quad |x_i + g_i| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (i = 3, \ldots, n)$$

mit dem Volumen V den Punkt $\mathfrak{x}_0$ mit den Koordinaten $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \cdots = x_n = 0$ enthält, wie groß auch V sein mag. Das inhomogene Problem ist in der letzten Zeit mehrfach behandelt worden. Mahler hat folgendes gezeigt: Ist $\overline{M}$ das erste Minimum des polaren Körpers $\overline{K}$ von K, so ist $M_J \cdot \overline{M} \geqq [(n+1)!]^2$. Mit dem Fall $n = 2$ hat sich besonders Heinhold [6] beschäftigt.

Ich beweise in § 6 folgenden Alternativsatz, der dem Alternativsatz bei linearen Gleichungssystemen analog ist: Besitzt der konvexe Körper K ein

Volumen $V \geqq 2^{n-1} \cdot k_0$ (k_0 natürliche Zahl) und gibt es höchstens $k_0 - r - 1$ Gitterpunktpaare $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$ $\left(0 \leqq r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1\right)$, so daß

(c) $$f(\mathfrak{g}) < M_h \qquad M_h \geqq \left(\frac{V}{J}\right)^{\frac{1}{n}},$$

so gibt es zu jedem $\mathfrak{x}_0$ mindestens $r+1$ Gitterpunkte $\bar{\mathfrak{g}}$, so daß

(d) $$f(\bar{\mathfrak{g}} + \mathfrak{x}_0) \leqq M_h$$

ist. Der Satz gilt nicht mehr, wenn $V < 2^{n-1} k_0$. Betrachten wir das Parallelepiped $|x_1| \leqq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, $|x_2| \leqq k_0 (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$, $|x_i| \leqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$ $(i = 3, \ldots, n)$, dessen Volumen $V = 2^{n-1} k_0 (1-\varepsilon)$ ist. Es enthält die $k_0 - 1$ von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j$ $(j = 1, \ldots, k_0 - 1)$, deren Koordinaten $g_{j1} = 0$, $g_{j2} = \pm j$, $g_{ji} = 0$ $(i = 3, \ldots, n)$ sind. Trotzdem gibt es keinen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ mit den Koordinaten $g_1, \ldots, g_n$, so daß

$$|g_1 + \tfrac{1}{2}| \leqq \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, \quad |g_2| \leqq k_0 (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}, \quad |g_i| \leqq (1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$$
$$(i = 3. \ldots, n)$$

ist. Ist das Volumen $V \geqq 2^{n-1} k_0$, so gibt es im allgemeinen auch nicht mehr als $r+1$ Gitterpunkte, die (d) erfüllen, wie man am Parallelepiped $|x_1| \leqq \frac{6}{7}$, $|x_2| \leqq \frac{2}{3}$, $|x_i| \leqq \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{1}{n-2}}$ $(i = 3, \ldots, n)$ sieht. Sein Volumen ist 2^{n-1} und es enthält keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunkt. Es gibt aber nur einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$, nämlich $\mathfrak{o}$, so daß

$$|g_1 + \tfrac{1}{8}| \leqq \tfrac{6}{7}, \quad |g_2 + \tfrac{1}{8}| \leqq \tfrac{2}{3}, \quad |g_i| \leqq \left(\tfrac{7}{8}\right)^{\frac{1}{n-2}} \qquad (i = 3, \ldots, n)$$

ist. Der Alternativsatz ist in einem allgemeineren Satz enthalten. Um ihn einfach aussprechen zu können, führe ich folgende Bezeichnungen ein: $T_{\mathfrak{g}}$ sei die Translation, die $\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{g}$ überführt, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} M$ sei die Menge, die aus einer Menge M bei dieser Translation hervorgeht. Dann lautet der Satz: Sind K_1 und K_2 zwei konvexe Körper mit dem Mittelpunkt in $\mathfrak{o}$ und ist die Summe ihrer Volumina $V_1 + V_2 \geqq 2^n \cdot k_0$ und enthalten die Körper K_i $(i = 1, 2)$ höchstens $k_0 - r_i - 1$ Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$, so erfüllen die konvexen Körper $\mathfrak{t}_{\mathfrak{g}} K_3$, wo $K_3 = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ den R_n lückenlos, und zwar ist die Überdeckung mindestens $r+1$-fach, wo $r = \left[\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}}\right]$ ist. Setzt man $K_1 = K_2 = K$, so ist $V_1 = V_2$, $r_1 = r_2 = r$ $K_3 = K$, und man erhält den Alternativsatz. Der obige Satz enthält auch noch den folgenden Satz von Mordell [7]: Es seien $L_i(\mathfrak{x})$ n Linearformen in $\mathfrak{x}$ mit der Determinante 1. Weiter seien

$\mu_1 \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n$ positive Zahlen mit $\mu_1 \ldots \mu_n + \nu_1 \ldots \nu_n \geqq 1$. Dann gibt es wenigstens zu einem der drei Systeme einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$, so daß

$$|L_i(\mathfrak{g})| \leqq \mu_i \,(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}), \quad |L_i(\mathfrak{g})| \leqq \nu_i \,(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}), \quad |L_i(\mathfrak{g} + \mathfrak{x}_0)| \leqq \tfrac{1}{2}\,(\mu_i + \nu_i).$$

Die soeben ausgesprochenen Sätze sind nicht auf konvexe Körper beschränkt. Ich betrachte gleich allgemeiner folgende Mengen: Es sei M eine beschränkte abgeschlossene, im Jordanschen Sinne meßbare Menge und $\mathfrak{R}$ irgendeine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix},$$

wo die $k_i > 0$ sind. Dann lassen sich alle Sätze auf die Menge $M(\mathfrak{R})$ aller Punkte der Form $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$ ($\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in M) übertragen. Die Sätze lassen sich für engere Klassen von Mengen verschärfen. In § 7 betrachte ich Mengen, ich nenne sie ω-konvex, die eine Distanzfunktion besitzen, bei denen statt (a) folgendes gilt: Sind k und k_0 irgendwelche natürliche Zahlen, aber $k > k_0$, so kann man aus k Punkten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$ stets $k_0 + 1$ Punkte $\mathfrak{x}_0', \ldots, \mathfrak{x}_{k_0}'$ so herausgreifen, daß

$$f^\sigma(\mathfrak{x}_0' - \mathfrak{x}_i') \leqq \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j) \qquad (i = 1, \ldots, k_0)$$

gilt. Dabei sind σ und c feste, positive Zahlen. Diese Eigenschaft ist stets dann vorhanden, wenn für jedes System von k Punkten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_j) \leqq c\, k \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j)$$

gilt. Dies ist der Fall für $f^\sigma(\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{n} |L_i(\mathfrak{x})|^\sigma$ ($\sigma \geqq 2$), wo die $L_i(\mathfrak{x})$ Linearformen in $\mathfrak{x}$ sind mit einer von Null verschiedenen Determinante, und zwar ist $c = 2^{\sigma-1}$ (v. d. Corput-Schaake [5]). Es wird in § 8 gezeigt, daß für ω-konvexe Mengen (c) und (d) mit $V \geqq \frac{k_0}{2}\, \frac{n+\sigma}{\sigma}\, c^{\frac{n}{\sigma}}$ gilt. Für die Ellipsoide ($\sigma = 2$, $c = 2$) ist wirklich $2^{-2+\frac{n}{2}}\,(n+2)\,k_0 < 2^{n-1} k_0$ ($n > 2$).

§ 2.

Deformationssatz.

Hilfssatz 1. *Es sei $F(x_1, x_2)$ eine reelle, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion, welche außerhalb des Quadrates Q:*

$$|x_1| \leqq K, \quad |x_2| \leqq K$$

verschwindet und in Q beschränkt ist: $|F(x_1, x_2)| \leqq C$. *Dann gibt es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und zu jedem* $\beta > 0$, *welches nur kleiner als*

$$c(\varepsilon) = \operatorname{Min}\left(K, \frac{\varepsilon}{42\,KC}, \frac{1}{4K}\left(\frac{\varepsilon}{21\,KC}\right)^2\right)$$

ist, ein α *im offenen Intervall* $\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$, *so daß*

$$(1) \qquad \sum_g{}' \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\beta g + \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) x_2, \beta g + \alpha x_2\right) dx_2 \leqq \frac{1}{\beta} \iint_{-\infty}^{+\infty} F\left(x_1 - \frac{x_2}{\beta}, x_1\right) dx_1\, dx_2 + \varepsilon \ldots$$

Dabei durchläuft g *alle ganzen Zahlen mit Ausschluß der Null.*

Wir verwenden folgenden Satz: Ist $f(x, y)$ über ein Rechteck im Riemannschen Sinne integrierbar, so sind die Funktionen

$$F_1(x) = \bar{\int} f(x, y)\, dy \text{ und}$$

$$F_2(y) = \bar{\int} f(x, y)\, dx$$

im Riemannschen Sinne integrierbar und es ist

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \int F_1(x)\, dx = \int F_2(y)\, dy$$

(s. A. Schoenfliess, Mengenlehre, S. 196; Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung III). Wir schreiben stets

$$F_1(x) = \int f(x, y)\, dy, \quad F_2(y) = \int f(x, y)\, dx.$$

In demselben Sinne sind auch die mehrfachen Integrale in Hilfssatz 2 und Satz 1 aufzufassen.

Bemerkung. Die Reihe ist endlich und die Integrale sind eigentlich, weil F außerhalb Q verschwindet. Für den Beweis von (1) ist es notwendig, Schranken für die x_1, x_2, y zu bestimmen. Wenn F nicht verschwinden soll, so müssen die Argumente von F stets im Quadrat Q liegen; auf der linken Seite von (1) ist also

$$(2) \qquad -K \leqq -\beta g + \left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) x_2 \leqq K, \quad -K \leqq \alpha x_2 + \beta g \leqq K.$$

Daraus folgt durch Addition $|x_2| \leqq 2K\beta$. Multiplizieren wir nun die erste Ungleichung mit α, die zweite mit $\frac{1}{\beta} - \alpha$ und addieren dann die erste (zweite) Hälfte der ersten Ungleichung zur zweiten (ersten) Hälfte der zweiten, so erhalten wir $|\beta g| \leqq K$, also zusammen:

$$(3\,a) \qquad |x_2| \leqq 2K\beta, \quad |g| \leqq K_1 = \frac{K}{\beta}.$$

Für die Integrationsgrenzen auf der rechten Seite von (1) erhalten wir analog

$$|x_2| \leqq 2K\beta, \quad |x_1| \leqq K. \tag{3b}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$F\left(\beta g + \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right)x_2, \beta g + \alpha x_2\right) = F_1(\alpha, \beta, g, x_2),\ F\left(x_1 - \frac{x_2}{\beta}, x_1\right) = F(x_1, x_2, \beta)$$

und beachten noch, daß für alle $\beta > 0$, welche kleiner als $c(\varepsilon)$ sind,

$$3KC\beta \ln \frac{2K}{\beta} < \frac{\varepsilon}{7}$$

ist, da $e^{\frac{\varepsilon}{21KC\beta}} > \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{21KC\beta}\right)^2 > \frac{4K\beta}{2\beta^2} = \frac{2K}{\beta}$ ist.

Wir führen den Beweis des Hilfssatzes indirekt. Wir nehmen an, das Gegenteil von (1) sei richtig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein positives $\beta < c(\varepsilon)$, so daß für alle α in $\left(0, \frac{1}{\beta}\right)$

$$\sum_g{}' \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_2 - \varepsilon$$

ist. Dann ist aber auch *)

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g{}' \int_{-2K\beta}^{2K\beta} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \iint_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_1\, dx_2 - \varepsilon.$$

Nun ist

$$\left|\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \int_{-2K\beta}^{2K\beta} F_1(\alpha, \beta, 0, x_2)\, dx_2\right| \leqq 4KC\beta \leqq < \frac{4KC\varepsilon}{42KC} < \frac{\varepsilon}{7},$$

also

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\alpha, \beta, g, x_2)\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x_1, x_2, \beta)\, dx_2 + \frac{6}{7}\varepsilon.$$

Dann ist aber entweder (1. Fall):

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g \int_0^{\infty} F_1\, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_0^{\infty} F_2\, dx_2 + \frac{3}{7}\varepsilon$$

*) Denn ist auf einem Intervall die Funktion $\varphi(x)$ stets > 0 so, so ist auch $\int \varphi\, dx > 0$.

oder (2. Fall):

$$\beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_g \int_{-\infty}^{0} F_1 \, dx_2 > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{0} F_2 \, dx_2 + \frac{3}{7}\varepsilon.$$

Wir nehmen an, der erste Fall liege vor. Der zweite Fall wird analog behandelt. Es ist nun

$$\left| \beta \int_0^{\frac{1}{\beta}} d\alpha \sum_{-K \leqq g \leqq K_1} \int_0^{\beta^2} F_1 \, dx_2 \right| \leqq (2K_1 + 1) C\beta^2$$
$$= (2K + \beta) C\beta \leqq 3KC\beta < \frac{\varepsilon}{14}$$

und ebenso

$$\left| \frac{1}{\beta} \int_{-K}^{K} dx_1 \int_0^{\beta^2} F_2 \, dx_2 \right| \leqq 2KC\beta < \frac{\varepsilon}{14},$$

also

$$\beta \sum_g \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_0^{\frac{1}{\beta}} F_1 \, d\alpha > \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} F_2 \, dx_2 + \frac{2}{7}\varepsilon.$$

Es ist nun

$$\beta \sum_{-K_1 \leqq g \leqq K_1} \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \int_{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}}^{\frac{1}{\beta}} F_1 \, d\alpha \leqq \beta \left(\frac{2K}{\beta} + 1\right) C \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \left(\frac{1}{\beta} - \left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}\right)$$

$$= 3KC\beta \int_{\beta^2}^{2K\beta} \frac{dx_2}{x_2} \left(\frac{x_2}{\beta^2} - \left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\right) \leqq 3KC\beta \int_{\beta^2}^{2K\beta} \frac{dx_2}{x_2} = 3KC\beta \ln \frac{2K\beta}{\beta^2} < \frac{\varepsilon}{7},$$

also ist

$$\beta \sum_g \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_0^{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}} F_1(\alpha, \beta, g, x_2) \, d\alpha > \frac{1}{\beta} \int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} F_2(x_1, x_2, \beta) \, dx_2 + \frac{\varepsilon}{7}.$$

Es ist nun

$$\frac{1}{\beta} \int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} F_2(x_1, x_2, \beta) \, dx_2 - \int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_0^{\frac{1}{\beta}} F_2(x_1, x_2, \beta) \, d\alpha$$

und

$$\int_{-K}^{K} dx_1 \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \int_{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}}^{\frac{1}{\beta}} F_2(x_1, x_2, \beta)\, d\alpha \Big| \leqq 2KC \int_{\beta^2}^{2K\beta} dx_2 \left(\frac{1}{\beta} - \left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}\right) < \frac{\varepsilon}{7}$$

also

$$\beta \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \sum_g \int_0^{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}} F_1\, d\alpha > \int_{\beta^2}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_0^{\left[\frac{x_2}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{x_2}} F_2\, d\alpha.$$

Dann muß es aber ein ξ geben, so daß

$$\beta \sum_g \int_0^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{\xi}} F_1\, d\alpha > \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_0^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]\frac{\beta}{\xi}} F_2\, d\alpha$$

oder anders geschrieben

$$\sum_{l=0}^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]-1} \int_{\frac{\beta l}{\xi}}^{\frac{\beta(l+1)}{\xi}} d\alpha \sum_g F_1 > \frac{1}{\beta} \sum_{l=0}^{\left[\frac{\xi}{\beta^2}\right]-1} \int_{\frac{\beta l}{\xi}}^{\frac{\beta(\lambda+1)}{\xi}} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F_2\, dx_1.$$

Dann muß es aber ein l geben, so daß

$$\sum_g \int_{\frac{\beta l}{\xi}}^{\frac{\beta(l+1)}{\xi}} F\left(\alpha\xi + \beta g - \frac{1}{\beta}\,\xi, \beta g + \alpha\xi\right) d\alpha > \frac{1}{\beta} \int_{\frac{\beta l}{\xi}}^{\frac{\beta(l+1)}{\xi}} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F_2\, dx_1.$$

Wir machen nun im linksstehenden Integral die Substitution $\alpha\xi + \beta g = x_1$, dann kommt

$$\frac{1}{\xi} \sum_g \int_{(l+g)\beta}^{(l+g+1)\beta} F\left(x_1 - \frac{\xi}{\beta}, x_1\right) dx_1 = \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x_1 - \frac{\xi}{\beta}, x_1\right) dx_1$$

$$> \frac{1}{\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(x_1 - \frac{\xi}{\beta}, x_1\right) dx_1.$$

Widerspruch.

Ich führe nun einige Abkürzungen ein. Ist

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

so setze ich

$$\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_1' = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{x}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1, \quad \mathfrak{x}_{n-2} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2,$$

$$\mathfrak{x}_{n-1}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad d\mathfrak{x} = dx_1 \ldots dx_n, \quad d\mathfrak{x}_1 = d\mathfrak{x}_1' = dx_1,$$

$$d\mathfrak{x}_2 = d\mathfrak{x}_2' = dx_2, \quad d\mathfrak{x}_{n-1} = dx_2 \ldots dx_n$$

und $d\mathfrak{x}_{n-2} = dx_3 \ldots dx_n$, wenn $n \geqq 3$.

Dann kann ich den Hilfssatz 1 so aussprechen:

Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $\beta > 0$, welches kleiner als $c(\varepsilon)$ ist, eine Matrix

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} \beta & \alpha - \frac{1}{\beta} \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{\beta},$$

so daß

$$(1') \qquad \sum_{g_1}{}' \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\mathfrak{A}'(\mathfrak{g}_1' + \mathfrak{x}_2')\right) d\mathfrak{x}_2' \leqq \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(\mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_2')\, d\mathfrak{x}_1'\, d\mathfrak{x}_2' + \varepsilon$$

ist.

Es ist ja $\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}\int F\left(x_1 - \frac{x_2}{\beta}, x_1\right) dx_1\, dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int F(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$.

Hilfssatz 2. *Es sei $\varphi(\mathfrak{x})$ eine reelle, beschränkte, im* Riemannschen *Sinne integrierbare Funktion, die außerhalb des Würfels $|x_i| \leqq K$ $(i = 1, \ldots, n)$ verschwindet. Dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{b}_{n-1}$*

$$\mathfrak{b}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{b}_{n-1}' \end{pmatrix},$$

so daß

$$(4) \qquad \sum_{g_1}{}' \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) \leqq \sum_{g_1}{}' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{g}_{n-1}$ alle Gitterpunkte, deren erste Koordinate Null ist, und g_1 durchläuft alle ganzen Zahlen mit Ausschluß der Null. Den Beweis von (4) führen wir indirekt. Nehmen wir an, (4) sei für alle $\mathfrak{b}_{n-1}$ falsch, insbesondere für alle $\mathfrak{b}_{n-1}$, für die

$$W: \quad 0 \leqq b_i \leqq 1 \qquad (i = 2, \ldots n)$$

ist! Dann muß auch

$$\sum_{g_1}' \int_{W} d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \sum_{g_1}' \int_{W} d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}$$

sein. Dann gibt es ein $g_1 \neq 0$, so daß

$$\int_{W} d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \int_{W} d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Wir teilen nun jede Seite des Würfels W in g_1 gleiche Teile und damit W i g_1^{n-1} Würfel W_j mit den Kantenlängen $\frac{1}{g_1}$. Dann ist also

$$\sum_{j=1}^{g_1^{n-1}} \int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \sum_{j=1}^{g_1^{n-1}} \int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Dann muß es aber einen Würfel W_j geben, so daß

$$\int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1} g_1 + \mathfrak{g}_1) > \int_{W_j} d\mathfrak{b}_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}$$

ist. Wir machen nun links die Substitution $\mathfrak{x}_{n-1}^* = g_1 \mathfrak{b}_{n-1}$, dann geht W_j i einen Würfel W^* mit der Kantenlänge 1 über:

$$\int_{W^*} d\mathfrak{x}_{n-1}^* \sum_{\mathfrak{g}_{n-1}} \varphi(\mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{x}_{n-1}^* + \mathfrak{g}_1) > \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Wir setzen schließlich links $\mathfrak{x}_{n-1} = \mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{x}_{n-1}^*$ und erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathfrak{x}_{n-1}\, \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1) > \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}.$$

Widerspruch.

Hilfssatz 2 läßt sich noch so aussprechen: *Es gibt eine Matrix* $\mathfrak{A}_3$:

$$(4') \qquad \mathfrak{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{O}_3 \\ \mathfrak{b}'_{n-1} & \mathfrak{E}_{n-1} \end{pmatrix},$$

wo $\mathfrak{O}_3$ *Nullmatrix und* $\mathfrak{E}_{n-1}$ *die* $n-1$*-zeilige Einheitsmatrix ist, so daß*

$$(4'') \qquad \sum_{g}' \varphi(\mathfrak{A}_3 \mathfrak{g}) \leqq \sum_{g_1=-\infty}^{+\infty}{}' \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{x}_{n-1} + \mathfrak{g}_1)\, d\mathfrak{x}_{n-1}$$

ist. Dabei sind links alle Gitterpunkte auszuschließen, deren erste Koordina Null ist.

Es ist ja

$$\mathfrak{A}_3\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{O}_3 \\ \mathfrak{b}'_{n-1} & \mathfrak{E}_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathfrak{g}'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathfrak{g}'_{n-1} + \mathfrak{b}'_{n-1}\, g_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_1 \\ \mathfrak{o}'_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathfrak{g}'_{n-1} + \mathfrak{b}'_{n-1}\, g_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_{n-1} + \mathfrak{b}_{n-1}\, g_1 .$$

Wir bemerken noch, daß $\mathfrak{A}_3\mathfrak{g}_{n-1} = \mathfrak{g}_{n-1}$ ist.

Satz 1 (Deformationssatz).

Es sei $\varphi(\mathfrak{x})$ reell, beschränkt, im Riemannschen *Sinne integrierbar und außerhalb des Würfels W: $|x_i| \leqq \frac{K}{2}$ $(i = 1, \ldots n)$ identisch Null. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$, so daß*

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A}\,\mathfrak{g}) \leqq \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + \varepsilon. \tag{5}$$

Dabei erstreckt sich die Integration rechts über den ganzen Raum R_n.

Beweis*). Ist $n \geqq 3$, so betrachte ich die Matrizen

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{K^{n-2}} & \mathfrak{O}_1 \\ & \mathfrak{O}_2 & K\,\mathfrak{E}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{O}_1 \\ \mathfrak{O}_2 & \mathfrak{E}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_3.$$

Dabei sind $\mathfrak{O}_1$, $\mathfrak{O}_2$ Nullmatrizen und $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}_3$ genau wie in (1″) bzw. (4″) definiert. Die $b_2, \ldots b_n$ in $\mathfrak{A}_3$ sind beliebig, und von den α, β in $\mathfrak{A}'$ setzen wir nur voraus: $0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$, $0 < \beta < \frac{1}{K(1+K^{n-2})}$. Dann ist $\frac{1}{K^{n-2}}\left(\frac{1}{\beta} - \alpha\right) + \frac{\alpha}{K^{n-2}} = \frac{1}{\beta K^{n-2}} > \left(\frac{1}{K^{n-2}} + 1\right) K$. Also muß entweder $\frac{1}{\beta} - \alpha$ oder $\frac{\alpha}{K^{n-2}}$ größer als K sein. Dann liegt aber der Punkt mit den Koordinaten $\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) g_2$, $\frac{\alpha g_2}{K^{n-2}}$, $K g_3, \ldots, K g_n$, bei denen die $g_2, \ldots, g_n$ ganzzahlig sind und nicht alle zugleich verschwinden, stets außerhalb des Würfels W; d. h. es ist für alle $\mathfrak{g}_{n-1} \neq \mathfrak{o}_{n-1}$

$$\varphi(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{g}_{n-1}) = \varphi\left(\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) g_2,\ \frac{\alpha g_2}{K^{n-2}},\ K g_3, \ldots, K g_n\right) = 0.$$

Ist $n = 2$, so betrachte ich die Matrizen

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K^{n-2}} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A}_3,$$

wo wieder $0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$, $0 < \beta < \frac{1}{K(1+K^{n-2})}$ und $\varphi(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{g}_{n-1}) = 0$ ist für alle $\mathfrak{g}_{n-1} \neq \mathfrak{o}_{n-1}$, d. h. für alle $g_2 \neq 0$.

*) Es würde genügen Satz 1 für stetiges φ zu zeigen, da es zu integrablen φ stets Polynome P_1, P_2 gibt, so daß auf W $P_1 < \varphi < P_2$, $\int (P_2 - P_1)\, d\mathfrak{x} < \varepsilon$ ist.

Um nun im folgenden die Fälle $n \geqq 3$ und $n = 2$ nicht immer unterscheiden zu müssen, so setze ich noch fest, daß unter dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-2}$ im Falle $n = 2$ die Zahl 1 zu verstehen ist. Wir führen nun die Funktion $F(x_1' + x_2') = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{A}_1 x)\, dx_{n-2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{A}_1(x_{n-2} + x_1 + x_2))\, dx_{n-2}$ ein. Es ist

$$F(\mathfrak{A}'(x_1' + x_2')) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 x)\, dx_{n-2}.$$

Wir wählen bei gegebenen ε nun $\beta < \mathrm{Min}\left(c(\varepsilon), \frac{1}{K(1+K^{n-2})}\right)$ und α entsprechend dem Hilfssatz 1. Es erfüllt ja $F(x_1' + x_2')$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 mit $C = K^{n-2} C_1$, wenn $|\varphi(x)| \leqq C_1$ ist. Nachdem wir α und β gewählt haben, wählen wir b_{n-1} entsprechend dem Hilfssatz 2 für die Funktion $\overline{\varphi}(x) = \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 x)$. Setzen wir nun $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3$, so haben wir nach (1'') und (4'')

$$\begin{aligned}
\varepsilon + \int_{R_n} \varphi(x)\, dx &= \varepsilon + \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{A}_1 x)\, dx = \varepsilon + \int\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1' + x_2')\, dx_1' dx_2' \\
&\geqq \sum_{g_1}' \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathfrak{A}'(g_1' + x_2'))\, dx_2' = \sum_{g_1}' \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2' \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-2}\, \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 (g_1 + x_2 + x_{n-2})) \\
&= \sum_{g_1}' \int_{-\infty}^{+\infty} dx_{n-1}\, \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 (g_1 + x_{n-1})) \geqq \sum_{g}' \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3 g).
\end{aligned}$$

Nun ist $\varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3\, g_{n-1}) = \varphi(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2\, g_{n-1}) = 0$ für $g_{n-1} \neq 0$, also

$$\varepsilon + \int_{R_n} \varphi(x)\, dx \geqq \sum_{g \neq 0} \varphi(\mathfrak{A} g).$$

§ 3.

Die Minkowskische Behauptung

Wir nennen zwei Mengen M' und M *äquivalent*, wenn es eine unimodulare Matrix $\mathfrak{A}$ gibt, so daß folgendes gilt: Zu jedem Punkt x' aus M' gibt es einen Punkt x aus M mit $x' = \mathfrak{A} x$, und umgekehrt zu jedem x aus M ein x' aus M', so daß $x = \mathfrak{A}^{-1} x'$. Wir schreiben kurz $M' = \mathfrak{A} M$. Dann lautet Satz 2:

Satz 2. *Ist M im Jordanschen Sinne meßbar und ist sein Volumen $V < k$ (k natürliche Zahl), so gibt es stets eine zu M äquivalente Menge, die höchstens $k - 1$ Gitterpunkte $\neq 0$ enthält.*

Beweis. Ich betrachte die charakteristische Funktion $\varphi(\mathfrak{x})$ von M — ($\varphi(\mathfrak{x}) = 1$, wenn $\mathfrak{x}$ in M, $\varphi(\mathfrak{x}) = 0$, wenn $\mathfrak{x}$ außerhalb M). Es gibt nun sicher ein $\varepsilon > 0$, so daß auch $V + \varepsilon < k$ ist. Nun wenden wir (5) an und erhalten

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} + \varepsilon = V + \varepsilon < k.$$

Links steht die Anzahl der von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunkte, die in der Menge $\mathfrak{A}^{-1}M$ liegen, und damit ist der Satz schon bewiesen.

Der Satz läßt sich für Strahlkörper S verschärfen.

Es sei $f(\mathfrak{x})$ eine reelle Funktion mit den Eigenschaften

a) $f(\mathfrak{x}) > 0$ für $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, $f(\mathfrak{o}) = 0$.

b) $f(t\mathfrak{x}) = t f(\mathfrak{x})$ für $t \geqq 0$.

c) $\int_{f(\mathfrak{x}) \leqq 1} d\mathfrak{x} = J$ vorhanden und endlich.

Dann heißt der Bereich $f(\mathfrak{x}) \leqq t$ *Strahlkörper.*

Satz 3. *Ist das Volumen V eines Strahlkörpers S kleiner als $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, so gibt es stets einen äquivalenten Strahlkörper, der außer dem Nullpunkt keine weiteren Gitterpunkte mehr enthält.*

Beweis. Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} = 1$. Dabei ist $\mu(k)$ die Möbiussche Funktion: $\mu(1) = 1$, $\mu(k) = 0$, wenn k durch ein Quadrat (außer 1) teilbar ist und $\mu(k) = (-1)^r$, wenn dies nicht der Fall ist und r die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von k ist. Unsere Voraussetzung lautet also

$$V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} < 1.$$

Nun kann ich sicher ein $\varepsilon > 0$ so wählen, daß auch

$$V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} + 2\varepsilon < 1$$

ist. Ist p_j die j-te Primzahl ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ...), so ist

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_j^n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n}.$$

Wegen der Konvergenz des linksstehenden Produktes kann ich ein $m \geqq 1$ so wählen, daß

$$V \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_j^n}\right) + \varepsilon < V \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^n} + 2\varepsilon < 1$$

wird. Setzen wir $N = p_1 \dots p_m$, so ist das linksstehende Produkt nicht anderes als $\sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n}$, wo k im Intervall $[1, N]$ alle ganzen Zahlen de Form $p_1^{e_1} \dots p_m^{e_m}$ $(e_j \geqq 0)$ durchläuft. Es ist also $V \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n} + \varepsilon < 1$

Ich betrachte nun auf S die Funktion

$$\psi_N(\mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k)\, \varphi(k\mathfrak{x}),$$

wo $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von S ist und wende (5) an. Es is

$$\int_S \psi_n(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \int_{f(\mathfrak{x}) \leq t} \varphi(k\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \int_{f(\mathfrak{x}) \leq \frac{t}{k}} \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n} \cdot V$$

Also ist

$$\sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \psi_N(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) = \sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A} k \mathfrak{g}) \leqq V \sum_{k=1}^{N}{}' \frac{\mu(k)}{k^n} + \varepsilon < 1.$$

Verstehen wir unter dem größten gemeinschaftlichen Teiler eines Gitter punktes den größten gemeinschaftlichen Teiler seiner Koordinaten, so is

$$\sum_{k=1}^{N}{}' \mu(k) \sum_{\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}} \varphi(\mathfrak{A} k \mathfrak{g})$$

nichts anderes als die Anzahl der von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Gitterpunkte in $\mathfrak{A}^{-1}S$ deren größte gemeinschaftliche Teiler durch keine der Primzahlen $p_1, \dots, p_r$ teilbar sind. Diese Anzahl ist nach obigem kleiner als 1, also Null. Im be sonderen können daher in $\mathfrak{A}^{-1}S$ auch keine Gitterpunkte $\neq \mathfrak{o}$ liegen, deren größter gemeinschaftlicher Teiler 1 ist. Dann können im Strahlkörper $\mathfrak{A}^{-1}S$ überhaupt keine Gitterpunkte liegen; denn nehmen wir an, in $\mathfrak{A}^{-1}S$ liege ein Gitterpunkt $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{o}$, so muß sein größter gemeinschaftlicher Teiler $d > 1$ sein und $\frac{\mathfrak{g}}{d}$ ist ebenfalls ein Gitterpunkt. Da $f(\mathfrak{A}\mathfrak{g}) \leqq t$ ist, so ist $f\left(\mathfrak{A}\frac{\mathfrak{g}}{d}\right) \leqq \frac{t}{d} < t$ also liegt $\frac{\mathfrak{g}}{d}$ im Strahlkörper $\mathfrak{A}^{-1}S$ und sein größter gemeinschaftlicher Teile ist 1. Dies ist aber nicht möglich. Damit ist der Satz vollständig bewiesen

Satz 4. *Ist der Strahlkörper S in bezug auf $\mathfrak{o}$ symmetrisch, d. h. is $f(\mathfrak{x}) = f(-\mathfrak{x})$ und ist das Volumen V von S kleiner als $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$, so gibt es stet einen zu S äquivalenten Strahlkörper, welcher ebenfalls in bezug auf $\mathfrak{o}$ symmetrisch ist, und der außer $\mathfrak{o}$ keine weiteren Gitterpunkte enthält.*

Der Beweis verläuft genau so wie bei Satz 3; man hat nur zu beachten, daß die Anzahl der Gitterpunkte, die in einem in bezug auf o symmetrischen Strahlkörper liegen, stets gerade ist.

Satz 3 und Satz 4 stellen die Minkowskische Behauptung dar.

§ 4.

Die $M(\mathfrak{R})$-Mengen.

Wir stellen nun eine Verallgemeinerung des Minkowskischen Fundamentalsatzes auf.

Es sei M eine beschränkte, abgeschlossene, im Jordanschen Sinne meßbare Menge vom Volumen V. Sie liege im Würfel $|x_i| \leqq K$ $(i = 1, \ldots, n)$. Auf M sei eine beschränkte, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $\varphi(\mathfrak{x})$ definiert; außerhalb M setzen wir $\varphi(\mathfrak{x}) = 0$. Weiter sei $\mathfrak{R}$ die Diagonalmatrix

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_n \end{pmatrix}, \quad k_i > 0, \tag{6}$$

$|\mathfrak{R}| = k_1 \ldots k_n$. Dann betrachten wir die Funktion

$$f(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{g}} \varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})). \tag{7}$$

Dabei durchläuft $\mathfrak{g}$ alle Gitterpunkte des R_n. Die Anzahl der nicht verschwindenden Summanden in der rechtsstehenden Summe ist endlich. $f(\mathfrak{x})$ ist in den x_i periodisch mit der Periode 1 und ebenfalls integrierbar. Wir bestimmen nun die Fourierkoeffizienten $a_{\mathfrak{l}}$ von $f(\mathfrak{x})$ oder gleich allgemeiner von

$$F(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{g}} [\varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) + \varphi_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g}) - \mathfrak{x}_0)].$$

Dabei ist $\varphi_1(\mathfrak{x})$ auf einer Menge M_1 definiert und $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt des R_n. Es sei W der Würfel $0 \leqq x_i \leqq 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\mathfrak{l}\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i$. Dann berechnen sich die Fourierkoeffizienten $c_{\mathfrak{l}}$ von $F(\mathfrak{x})$ so:

$$c_{\mathfrak{l}} = \int_W F(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{g}} \int_W [\varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) + \varphi_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g}) - \mathfrak{x}_0)]\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}$$

$$= \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{R}\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{R}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}.$$

Führen wir noch die Substitution $\mathfrak{x}' = \mathfrak{R}\mathfrak{x}$ aus, so lautet $c_{\mathfrak{l}}$:

$$c_{\mathfrak{l}} = |\mathfrak{R}|^{-1} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x} \tag{8}$$

und insbesondere für $\varphi_1(\mathfrak{x}) \equiv 0$

$$a_{\mathfrak{l}} = |\mathfrak{R}|^{-1} \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}. \tag{8a}$$

Ist $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M, so ist

$$a_{\mathfrak{o}} = |\mathfrak{R}|^{-1} V$$

und wenn $\varphi_1(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M_1 ist:

$$c_{\mathfrak{o}} = |\mathfrak{R}|^{-1}(V + V_1),$$

wo V_1 das Volumen von M_1 ist.

Ist $\psi(\mathfrak{x})$ eine Funktion mit denselben Eigenschaften wie $\varphi(\mathfrak{x})$, so bilden wir wieder

$$g(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{g}} \psi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g}))$$

und die Fourierkoeffizienten von $g(\mathfrak{x})$ seien $b_{\mathfrak{l}}$.

Dann ist $\sum_{\mathfrak{l}} a_{\mathfrak{l}} \bar{b}_{\mathfrak{l}}$ konvergent und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_W f(\mathfrak{x})\, \bar{g}(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} a_{\mathfrak{l}} \bar{b}_{\mathfrak{l}}.$$

Die linke Seite ist gleich

$$\int_W \sum_{\mathfrak{g}} \varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\psi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r}))\, d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{g}} \int_W \varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\psi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r}))\, d\mathfrak{x}$$

$$= \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{R}\mathfrak{x}) \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\psi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r}))\, d\mathfrak{x},$$

also

$$|\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\, \overline{\psi}(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\, d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} a_{\mathfrak{l}} \bar{b}_{\mathfrak{l}}. \tag{9}$$

Ebenso ist für $F(\mathfrak{x})$:

$$\int_W |F(\mathfrak{x})|^2\, d\mathfrak{x} = \int_W d\mathfrak{x} \sum_{\mathfrak{g}} [\varphi(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g})) + \varphi_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{g}) - \mathfrak{x}_0)] \sum_{\mathfrak{r}} [\overline{\varphi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r})) + \overline{\varphi}_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r}) - \mathfrak{x}_0)]$$

$$= \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{R}\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{R}\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, [\overline{\varphi}(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r})) + \overline{\varphi}_1(\mathfrak{R}(\mathfrak{x} - \mathfrak{r}) - \mathfrak{x}_0)]\, d\mathfrak{x},$$

also

$$|\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\, [\overline{\varphi}(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \overline{\varphi}_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})]\, d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |c_{\mathfrak{l}}|^2. \tag{9'}$$

Ich bilde nun die Menge $M(\mathfrak{R}) = \overline{M}$ aller Punkte der Form $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$, wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ der Menge angehören. Daraus folgt, daß $\overline{M}\,\mathfrak{o}$ enthält und in bezug auf $\mathfrak{o}$ symmetrisch ist. Ist $\overline{M} = M$ und $k_i = 2$ $(i = 1, \ldots, n)$, so ist M konvex. Ich beweise nun den

Hilfssatz 3. Sind $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ Punkte von M und ist $\mathfrak{x}$ innerer Punkt von M, so ist $\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y}) = \mathfrak{z}$ innerer Punkt von $M(\mathfrak{R}) = \overline{M}$.

Beweis. Wir bezeichnen mit $d(\mathfrak{x})$ den Abstand des Punktes $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{o}$. Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen an, $\mathfrak{z}$ ist kein innerer Punkt von $\overline{M}$. Dann enthält jede Kugel $d(\mathfrak{z}-\mathfrak{z}') \leqq \varrho \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \cdots, \frac{1}{k_n}\right)$ ($\varrho > 0$, sonst beliebig) einen Punkt $\mathfrak{z}'$, der nicht zu $\overline{M}$ gehört. Nun ist $d(\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})-\mathfrak{z}') = d(\mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{R}\mathfrak{z}')) \geqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{k_1}, \cdots, \frac{1}{k_n}\right) d(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{R}\mathfrak{z}')$, also $d(\mathfrak{x}-\mathfrak{y}-\mathfrak{R}\mathfrak{z}') \leqq \varrho$. Der Punkt $\mathfrak{y}+\mathfrak{R}\mathfrak{z}'$ liegt nicht in M, denn sonst liegt $z' = \mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{R}\mathfrak{z}'+\mathfrak{y}-\mathfrak{y})$ in $\overline{M}$. Also enthält jede Kugel von $\mathfrak{x}$ einen Punkt, der nicht in M liegt. Widerspruch.

Wir wollen nun die Voraussetzung machen, daß in $\overline{M}$ *höchstens* $k_0 - 1$ verschiedene Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$ *innere* Punkte von M sind. Dabei sei k_0 eine natürliche Zahl. Setzen wir in (9) $\psi(\mathfrak{x}) \equiv \varphi(\mathfrak{x})$ auf M, so hat die Summe links in (9) höchstens k_0 nichtverschwindende Summanden. Wenn wir nämlich annehmen, die Anzahl dieser Summanden ist größer als k_0, so gibt es mindestens k_0 voneinander verschiedene Punkte $\mathfrak{r}_m \neq \mathfrak{o}$ ($m = 1, \ldots, k_0$), für die

$$\int_M \varphi(\mathfrak{x})\,\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)\,d\mathfrak{x} \neq 0$$

ist. Dann gibt es ein $\mathfrak{x}$, so daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m$ innere Punkte von M sind; dann liegt aber $\pm\mathfrak{r}_m$ in $\overline{M}$ und zwar ist $\mathfrak{r}_m$ nach Hilfssatz 3 innerer Punkt von $\overline{M}$. Das heißt aber, $\overline{M}$ enthält k_0 voneinander verschiedene, von $\mathfrak{o}$ verschiedene, Gitterpunktpaare, welche innere Punkte von $\overline{M}$ sind, was nicht sein soll. Es gilt also wegen (9) und (8)

$$(10)\qquad \sum_{m=0}^{G} \int_M \varphi(\mathfrak{x})\,\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)\,d\mathfrak{x} = |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{l}} \left|\int_M \varphi(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}\right|^2,$$

wo $0 \leqq G \leqq k_0 - 1$ und $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{o}$ ist. Nun ist

$$\left|\int_M \varphi(\mathfrak{x})\,\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)\,d\mathfrak{x}\right|^2 \leqq \int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x} \int_M |\overline{\varphi}(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}\mathfrak{r}_m)|^2\,d\mathfrak{x},$$

also ist die Summe links dem Betrage nach kleiner als

$$(G+1)\int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x} \leqq k_0 \int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x}.$$

Also folgt aus (10)

$$(11)\qquad k_0 \int_M |\varphi(\mathfrak{x})|^2\,d\mathfrak{x} \geqq |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{l}} \left|\int_M \varphi(\mathfrak{x})\, e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}\right|^2.$$

Es sei nun wieder $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M. Dann folgt aus (11)

$$(12)\qquad k_0\,|\mathfrak{R}|\,V \geqq V^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq\mathfrak{o}} \left|\int_M e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{x}\right|^2.$$

Es gilt also

Satz 5. *Erfüllt das Volumen V von M die Ungleichung*

$$V > k_0 |\mathfrak{R}| - \frac{1}{V} \sum_{\mathfrak{l} \neq \mathfrak{o}} \left| \int_M e^{-2\pi i \mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{l} \cdot \mathfrak{x}} \, d\mathfrak{x} \right|^2, \tag{13}$$

so besitzt $M(\mathfrak{R})$ mindestens k_0 von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare.

Für konvexe Körper und $k_0 = 1$ stammt der Satz und sein Beweis von C. Siegel [3]. Insbesondere gilt Satz 5. wenn $V > k_0 k_1 \ldots k_n$. Dies wurde auf andere Weise zuerst von v. d. Corput [4] gezeigt. Durch einen einfachen Grenzübergang zeigt man in üblicher Weise (v. d. Corput [4]) den

Satz 5′. *Ist das Volumen V von M größer oder gleich $k_0|\mathfrak{R}|$, so besitzt $M(\mathfrak{R})$ mindestens k_0 von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare.*

§ 5.

Ein Grenzfall.

Wir wollen nun in diesem Paragraphen die Voraussetzung machen, daß M das Volumen $V = k_0|\mathfrak{R}| = k_0 k_1 \ldots k_n$ besitzt. Nach Satz 5′ besitzt also sicher $M(\mathfrak{R})$ mindestens k_0 von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare.

Wir wollen nun voraussetzen, daß in $\overline{M} = M(\mathfrak{R})$ höchstens $k_0 - 1$ innere Punktepaare Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$ sind. Wir betrachten nun neben M die um $\mathfrak{R}\mathfrak{g}$ verschobenen Mengen $M_\mathfrak{l}$ ($M_\mathfrak{o} = M$). Dann behaupten wir: *Ein Punkt des R_n kann von höchstens k_0 solchen Mengen $M_\mathfrak{g}$ innerer Punkt sein.* Nehmen wir an, es gibt einen Punkt $\mathfrak{x}_0$, der mindestens $k_0 + 1$ solchen $M_\mathfrak{g}$ als innerer Punkt angehört, d. h. es gibt $k_0 + 1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}_j$ ($j = 1, \ldots, k_0 + 1$), so daß $\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{g}_j$ innere Punkte von M sind! Dann liegen die Gitterpunktpaare $\pm(\mathfrak{g}_j - \mathfrak{g}_l)$ in $\overline{M}$ und sind innere Punkte von $\overline{M}$, nach dem obigen Hilfssatz 3. Diese k_0 Gitterpunktpaare sind alle voneinander und von $\mathfrak{o}$ verschieden und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Wir behaupten nun

Satz 6: *Ist M eine beschränkte, abgeschlossene Menge vom Volumen $V = k_0|\mathfrak{R}|$ und besitzt $M(\mathfrak{R})$ höchstens $k_0 - 1$ Gitterpunktpaare als innere Punktepaare, so liegt jeder Punkt des R_n in mindestens einer der Mengen $M_\mathfrak{g}$.*

Für konvexe Mengen und $k_0 = 1$ wurde dies von Minkowski bewiesen (Geometrie der Zahlen, § 32).

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein $\mathfrak{x}_0$, welches keinem der $M_\mathfrak{g}$ angehört. Dieser Punkt $\mathfrak{x}_0$ kann auch kein Häufungspunkt der Vereinigungsmenge $S = \sum_\mathfrak{g} M_\mathfrak{g}$ sein. Um dies zu zeigen, denke ich mir alle Gitterpunkte in irgendeiner Weise so als Folge geschrieben $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$, so daß $\lim_{i \to \infty} d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}_i) = \infty$

Ist nun $\mathfrak{x}_0$ Häufungspunkt von S, so kann ich aus S eine unendliche Folge $(\mathfrak{x}_k)$ herausgreifen mit $\lim_{k\to\infty} \mathfrak{x}_k = \mathfrak{x}_0$ und daher $d(\mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_0) < C_1$ für alle k. Nun gibt es sicher einen Index j, so daß die Folge $(\mathfrak{x}_k)$ bereits in $\sum_{i=1}^{j} M_{\mathfrak{g}_i}$ liegt. Denn sonst gibt es eine unendliche Folge von Gitterpunkten $\mathfrak{g}'_k$ mit $d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k) \to \infty$ für $k \to \infty$ und eine Teilfolge (φ'_k) von $(\mathfrak{x}_k)$, so daß $\mathfrak{x}'_k$ in $M_{\mathfrak{g}_{k'}}$ liegt. Nun liegt die Folge $(\varphi^*_k) = (\varphi'_k - \mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k)$ in der beschränkten Menge $M - M\mathfrak{o}$, also $d(\mathfrak{x}'_k - \mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k) < C_2$ für alle k. Dann ist aber $d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k) = d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k - \varphi'_k + \mathfrak{x}'_k - \mathfrak{x}_0) \leqq d(\mathfrak{R}\mathfrak{g}'_k - \mathfrak{x}'_k) + d(\mathfrak{x}'_k - \mathfrak{x}_0) \leqq C_1 + C_2 = C_3$ für alle k, was unmöglich ist. Es gibt also einen Index j, so daß die Folge $(\mathfrak{x}_k)$ in $\sum_{i=1}^{j} M_{\mathfrak{g}_i}$ liegt. Dann gibt es aber eine unendliche Teilfolge $(\mathfrak{x}'_k)$ von $(\mathfrak{x}_k)$, die in einem der $M_{\mathfrak{g}_i}$ $(1 \leqq i \leqq j)$ liegt, z. B. $M_{\mathfrak{g}_1}$. Nun ist $M_{\mathfrak{g}_1}$ abgeschlossen und $\mathfrak{x}_0$ Häufungspunkt der Folge $(\mathfrak{x}'_k)$, die ganz auf $M_{\mathfrak{g}_1}$ liegt, also muß $\mathfrak{x}_0$ auch in $M_{\mathfrak{g}_1}$ liegen, in Widerspruch zur Voraussetzung. Es gibt daher eine Kugel K um den Punkt $\mathfrak{x}_0$ mit einem Radius $\varrho > 0$, welche zu allen $M_{\mathfrak{g}}$ punktfremd ist.

Dann sind auch die Kugeln $K_{\mathfrak{g}}$ mit den Mittelpunkten $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{R}\mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}$ Gitterpunkt) zu allen $M_{\mathfrak{g}}$ punktfremd. Ist $\varphi_1(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion der Kugel $\overline{K}$ mit dem Radius ϱ und dem Mittelpunkt im Ursprung, so ist also

$$\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\ \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{g}) = 0,$$

wo $\varphi(\mathfrak{x})$ die charakteristische Funktion von M ist. Wir wählen noch ϱ so klein, daß die Kugeln $K_{\mathfrak{r}}$ zueinander punktfremd sind, d. h.

$$\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\ \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) = 0$$

für alle $\mathfrak{r}$. Dann ist nach (9′)

$$(14)\quad |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi(\mathfrak{x}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)]\,[\varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})]\,d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |c_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Der linksstehende Ausdruck lautet ausmultipliziert

$$\sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\ \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\,d\mathfrak{x} + \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\ \varphi(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{r}) + \varphi(\mathfrak{x})\ \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})]\,d\mathfrak{x} + \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0)\ \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0 - \mathfrak{R}\mathfrak{r})\,d\mathfrak{x}.$$

Nach Voraussetzung verschwindet die zweite Summe. Auf die erste Summe können wir die Überlegungen von (10) bis (12) anwenden; bei der dritten Summe verschwinden alle Glieder außer dem Glied mit $\mathfrak{r} = \mathfrak{o}$. Bezeichnen wir das Volumen von $\overline{K}$ mit V_1, so erhalten wir

$$|\mathfrak{R}|^{-1}(k_0 V + V_1) \geqq |c_{\mathfrak{o}}|^2 + \sum_{\mathfrak{l} \neq \mathfrak{o}} |c_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Da nun $c_{\mathfrak{o}} = |\mathfrak{R}|^{-1}(V + V_1)$, so ist

$$(15)\qquad |\mathfrak{R}|\,(k_0 V + V_1) \geqq (V + V_1)^2.$$

Nun ist nach Voraussetzung $V = k_0 k_1 \dots k_n = k_0 = k_0 |\mathfrak{R}|$, also

$$|\mathfrak{R}| V_1 = \frac{V V_1}{k_0} \geqq 2 V V_1 + V_1^2,$$

dann muß aber $V_1 = 0$ sein, also auch $\varrho = 0$. Widerspruch.

§ 6.

Die Alternativsätze.

Satz 7. *Besitzt M ein Volumen $V \geqq \frac{k_0 |\mathfrak{R}|}{2}$ und sind höchstens $k_0 - r - 1$ Gitterpunktpaare, welche von $\mathfrak{o}$ verschieden sind, innere Punkte von $M(\mathfrak{R})$ $(0 \leqq r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1)$, so erfüllen die Mengen $\mathfrak{t}_\mathfrak{g} M(\mathfrak{R})$ den R_n lückenlos und die Überdeckung ist mindestens $r+1$-fach, d. h. es gibt zu jedem $\mathfrak{x}_0$ mindestens $r+1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}$, so daß $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{g}$ in $M(\mathfrak{R})$ liegt.*

Satz 7 ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 7a. *Es seien M_1 und M_2 zwei beschränkte, abgeschlossene, im Jordanschen Sinne meßbare Mengen und die Summe ihrer Volumina $V_1 + V_2 \geqq k_0 |\mathfrak{R}| - k_0 k_1 \dots k_n$ $(V_1 > 0,\ V_2 > 0)$. Weiter seien höchstens $k_0 - r_i - 1$ $\left(i = 1, 2,\ 0 \leqq r_i \leqq k_0 - \left[\frac{V_i}{\mathfrak{R}}\right] - 1\right)$ von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare innere Punkte von M_i. Ist dann $M_3(\mathfrak{R})$ die Menge aller Punkte der Form $\pm \mathfrak{R}^{-1}(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})$, wo $\mathfrak{x}$ in M_1 und $\mathfrak{y}$ in M_2 liegt, so erfüllen die $\mathfrak{t}_\mathfrak{g} M_3(\mathfrak{R})$ den R_n lückenlos, und zwar ist die Überdeckung mindestens $r+1$-fach mit*

$$r = \left[\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}}\right].$$

Es muß $r_i \leqq k_0 - \left[\frac{V_i}{\mathfrak{R}}\right] - 1$ vorausgesetzt werden, da nach Satz 5 $M_i(\mathfrak{R})$ mindestens $\left[\frac{V_i}{|\mathfrak{R}|}\right]$ von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare enthält.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Die charakteristische Funktion von M_i sei $\varphi_i(\mathfrak{x})$. Ist $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt des R_n, so setzen wir $\psi_i(\mathfrak{x}) = \varphi_i(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}\mathfrak{x}_0)$. Mit M_i^0 bezeichnen wir die Menge aller inneren Punkte von M_i.

Ist $\mathfrak{x}_0$ Gitterpunkt und $M_1 = M_2 = M$, so läßt sich Satz 7a sofort beweisen. Es ist dann $V_1 = V_2 = V$, $r_1 = r_2 = r$, $M_1(\mathfrak{R}) = M_2(\mathfrak{R}) = M_3(\mathfrak{R})$. In $M^0(\mathfrak{R})$ liegen nach Voraussetzung höchstens $k_0 - r - 1$ von $\mathfrak{o}$ verschiedene Gitterpunktpaare. Dabei ist $r \leqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1$, d. h. $M(\mathfrak{R})$ enthält nach Satz 5′ mindestens $s = \left[\frac{k_0}{2}\right]$ Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_1, \dots \pm \mathfrak{g}_s \neq \mathfrak{o}$. Dann liegt der Gitterpunkt $\mathfrak{x}_0$ in den $2s+1$ Mengen $\mathfrak{t}_{\mathfrak{x}_0} M(\mathfrak{R})$, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{x}_0 \pm \mathfrak{g}_j} M(\mathfrak{R})$. Nun ist $2s + 1 = 2\left[\frac{k_0}{2}\right] + 1 \geqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] \geqq r + 1$, was zu zeigen war.

Wir können also im folgenden den Fall ausschließen, daß $M_1 \quad M_2$ und $\mathfrak{x}_0$ Gitterpunkt ist.

Hilfssatz 4: Für jedes $\mathfrak{y}$ ist stets

$$\int_{R_n} \varphi_1(\mathfrak{x})\,\varphi_2(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\,d\mathfrak{x} + \int_{R_n} \varphi_2(\mathfrak{x})\,\varphi_1(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})\,d\mathfrak{x} \leqq 2\sqrt{V_1 V_2},$$

und das Gleichheitszeichen tritt nur dann ein, wenn $M_1 - M_2$, $\mathfrak{y} = 0$ ist.

Beweis. Es ist $\varphi_1(\mathfrak{x})\,\varphi_2(\mathfrak{x}-\mathfrak{y})$ dann und nur $\neq 0$, wenn $\mathfrak{x}$ in M_1 und $\mathfrak{x}-\mathfrak{y}$ in M_2 liegt. Es ist also das erste Integral das Volumen des Durchschnittes D_1 von M_1 und $M_2 + \mathfrak{y}$ und daher $\leqq \mathrm{Min}\,(V_1, V_2) \leqq \sqrt{V_1 V_2}$, ebenso das zweite Integral das Volumen des Durchschnittes D_2 von M_2 und $M_1 + \mathfrak{y}$. Soll nun bei beiden Integralen das Gleichheitszeichen gelten, so muß $V_1 = V_2 =$ Volumen von $D_1 =$ Volumen von D_2 sein. Also muß, da D_1 Durchschnitt von M_1 und $M_2 + \mathfrak{y}$ ist*), $D_1^0 = M_1^0 = M_2^0 + \mathfrak{y}$ sein und ebenso $D_2^0 \quad M_2^0 = M_1^0 + \mathfrak{y}$, also $M_1^0 = M_1^0 + 2\,\mathfrak{y}$. Dies ist, da M_1^0 beschränkt ist, nur so möglich, daß $\mathfrak{y} = 0$, $M_1^0 = M_2^0$ und daher $M_1 = M_2$ ist, w. z. b. w.

Beweis von Satz 7a. Die Fourierkoeffizienten von $\varphi_i(\mathfrak{x})$ seien $a_{i\mathfrak{l}}$, dann ist

$$(16)\quad |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{\mathfrak{r}} \int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x})\,\varphi_2(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r})) + \varphi_2(\mathfrak{x})\,\varphi_1(\mathfrak{x}-\mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}))]\,d\mathfrak{x}$$
$$= \sum_{\mathfrak{l}} (a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}} + \overline{a_{1\mathfrak{l}}}\,a_{2\mathfrak{l}})\,e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0} = 2\,|\mathfrak{R}|^{-2} V_1 V_2 + 2 \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} R(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\,e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}.$$

Nun folgt aus (12) wegen der gemachten Voraussetzungen

$$(k_0 - r_i)\,V_i\,|\mathfrak{R}|^{-1} \geqq |\mathfrak{R}|^{-2} V_i^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{i\mathfrak{l}}|^2 \qquad (i = 1, 2).$$

Dann ist

$$\left|2 \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} R(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\,e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}\right| \leqq \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} (|a_{1\mathfrak{l}}|^2 + |a_{2\mathfrak{l}}|^2$$
$$\leqq |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{i=1}^{2} (k_0 V_i - |\mathfrak{R}|^{-1} V_i^2 - r_i V_i),$$

also ist

$$(16')\quad \left|2\,|\mathfrak{R}|^{-2} V_1 V_2 + 2 \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} R(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\,e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}\right|$$
$$\geqq 2\,|\mathfrak{R}|^{-2} V_1 V_2 - 2\left|\sum_{\mathfrak{l}\neq 0} R(a_{1\mathfrak{l}}\overline{a_{2\mathfrak{l}}})\,e^{-2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}\right|$$
$$\geqq \Big(\sum_{i=1}^{2} V_i\Big)^2 |\mathfrak{R}|^{-2} - k_0 \sum_{i=1}^{2} V_i\,|\mathfrak{R}|^{-1} + \sum_{i=1}^{2} r_i V_i\,|\mathfrak{R}|^{-1} \geqq \sum_{i=1}^{2} r_i V_i\,|\mathfrak{R}|^{-2}.$$

*) Ist nämlich z. B. $D_1^0 \neq M_1^0$, so gibt es eine ganz in M_1 liegende Kugel K, welche mit D_1 keinen inneren Punkt gemeinsam hat und es ist dann $V_1 \geqq$ Vol. D_1 + Vol. $K >$ Vol. D_1.

Daraus folgt, daß die Summe auf der linken Seite von (16) mindestens $r+1$ nicht verschwindende Summanden haben muß. Sind nämlich nur höchstens r solche Summanden vorhanden, so ist der Betrag dieser Summe *kleiner* als $\sum_{i=1}^{2} r_i V_i |\mathfrak{R}|^{-2}$ in Widerspruch zu (16'). Es ist nämlich nach Hilfssatz 4

$$\int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x})\, \varphi_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r})) + \varphi_2(\mathfrak{x})\, \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}))]\, d\mathfrak{x} < 2\sqrt{V_1 V_2},$$

da wir ja den Fall $M_1 = M_2$, $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r} = 0$ als bereits erledigt, ausgeschlossen hatten. Also ist, wenn die fragliche Summe höchstens r nichtverschwindende Summanden hat, die Summe $< 2r\sqrt{V_1 V_2}\,|\mathfrak{R}|^{-1}$ $= 2|\mathfrak{R}|^{-1}\sqrt{V_1 V_2}\left[\frac{r_1 V_1 + r_2 V_2}{2\sqrt{V_1 V_2}}\right] \leqq |\mathfrak{R}|^{-1} \sum_{i=1}^{2} r_i V_i$. Es gibt also $r+1$ Punkte $\mathfrak{r}_m$, so daß

$$\int_{R_n} [\varphi_1(\mathfrak{x})\, \varphi_2(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)) + \varphi_2(\mathfrak{x})\, \varphi_1(\mathfrak{x} - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m))]\, d\mathfrak{x} > 0$$

ist. Dann gibt es aber $r+1$ Punkte $\mathfrak{x}_m$, so daß

$$\varphi_1(\mathfrak{x}_m)\, \varphi_2(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)) + \varphi_2(\mathfrak{x}_m)\, \varphi_1(\mathfrak{x}_m - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)) > 0$$

ist. Dann muß aber entweder $\mathfrak{x}_m$ in M_1 und $\mathfrak{x}_m - \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m)$ in M_2 liegen oder umgekehrt. Also liegen auf jeden Fall die Punkte $\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}_m$ ($m = 1, \ldots, r+1$) in $M_3(\mathfrak{R})$, w. z. b. w.

§ 7.

Die ω-konvexen Mengen.

Es sei $f(\mathfrak{x})$ eine reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften:

a) $f(\mathfrak{x}) > 0$ für alle $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, $f(\mathfrak{o}) = 0$,

b) $f(t\mathfrak{x}) = t f(\mathfrak{x})$ für alle $t \geqq 0$.

c) Es gibt zwei positive Zahlen c und σ, so daß folgendes gilt: Sind k und k_0 beliebige natürliche Zahlen ($k_0 < k$), so kann man stets aus k Punkten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ $k_0 + 1$ Punkte $\overline{\mathfrak{x}_0}, \overline{\mathfrak{x}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{x}_{k_0}}$ herausgreifen, so daß

$$f^\sigma(\overline{\mathfrak{x}_i} - \overline{\mathfrak{x}_0}) \leqq \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j) \qquad (i = 1, \ldots, k_0$$

ist.

d) $f(\mathfrak{x})$ besitzt auf der Kugel $\mathfrak{x}^2 = 1$ eine positive untere Schranke.

Dann nenne ich die durch $f(\mathfrak{x}) \leqq c^{\frac{1}{\sigma}} t$ definierte Menge K ω-konvex. Im weiteren setze ich noch, nur der Einfachheit halber, voraus

e) $f(-\mathfrak{x}) = f(\mathfrak{x})$.

Wir zeigen zunächst

Satz 8. *Erfüllt $f(\mathfrak{x})$ außer den Eigenschaften* a) b), d) *noch* c_1): *Sind $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ irgendwelche Punkte des R_n, und ist*

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_i - \mathfrak{x}_j) \leqq c\,k \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j), \tag{17}$$

so hat $f(\mathfrak{x})$ auch die Eigenschaft c).

Wir müssen also zeigen: Es gibt unter den $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_k$ stets $k_0 + 1$ Punkte $\overline{\mathfrak{x}_0}, \overline{\mathfrak{x}_1}, \ldots, \overline{\mathfrak{x}_{k_0}}$ (k_0 beliebig $< k$), so daß

$$f^\sigma(\overline{\mathfrak{x}_i} - \overline{\mathfrak{x}_0}) \leqq \frac{K}{k - k_0} = \frac{c}{k - k_0} \sum_{j=1}^{k} f^\sigma(\mathfrak{x}_j).$$

Wir schreiben für die Summe links in (17) kurz $\sum_{i \neq j} (ij)$*). Sie enthält $k(k-1)$ nichtverschwindende Summanden; zu jeder Zahl i ($1 \leqq i \leqq k$) gibt es $k-1$ Paare (ij). Aus diesen können wir auf $\binom{k-1}{k_0}$ Arten Systeme von k_0 Paaren $(i, i_1), \ldots (i, i_{k_0})$ herausgreifen. Wir nennen sie die Systeme der i-ten Zeile. Führen wir dies für $i = 1, \ldots, k$ durch, so erhalten wir $k\binom{k-1}{k_0}$ solche Systeme. Jedes System enthält k_0 Paare, also die Gesamtheit aller Systeme $k\,k_0\binom{k-1}{k_0}$ Paare; nun haben wir aber nur $k(k-1)$ Paare, also kommt jedes Paar

$$\frac{k\,k_0\binom{k-1}{k_0}}{k(k-1)} = \binom{k-2}{k_0-1}\text{-mal}$$

vor. Also ist die Summe über alle Paare aller Systeme gleich

$$\binom{k-2}{k_0-1} \sum_{i \neq j} (ij)$$

und daher

$$\leqq K k \binom{k-2}{k_0-1}.$$

Nehmen wir nun an der Satz sei nicht richtig, dann gibt es in jedem System mindestens ein Paar (ij), welches $> \frac{K}{k - k_0}$ ist; ich nenne sie kurz b-Paare. Wir zeigen nun: In jeder Zeile gibt es mindestens $k - k_0$ voneinander verschiedene b-Paare. Ich zeige es für die erste Zeile. Ich greife ein System aus der ersten Zeile heraus und aus ihm ein b-Paar $(1, i^1)$. Dieses b-Paar kommt gleichzeitig in $\binom{k-2}{k_0-1}$ Systemen vor. Diese Systeme denke ich mir gestrichen. Ich nehme eines der übriggebliebenen Systeme und greife wieder ein b-Paar

*) O. B. d. A. $(ij) \neq (i'j')$, wenn $(i-i')^2 + (j-j')^2 \neq 0$.

heraus $(1, i^2)$, welches natürlich $\neq (1, i^1)$ ist. Dieses kommt in $\binom{k-3}{k_0-1}$ Systemen vor. Auch diese denke ich mir gestrichen, und so gehe ich weiter. Nach $k-k$ Schritten ist dieser Prozeß zu Ende, alle Systeme sind gestrichen, und ich habe $k-k_0$ voneinander verschiedene b-Paare in der 1-ten Zeile gefunden. Jedes Paar kommt $\binom{k-2}{k_0-1}$-mal vor, also ist die Summe der b-Paare der 1-Zeile

$$> \binom{k-2}{k_0-1}(k-k_0)\frac{K}{k-k_0} = \binom{k-2}{k_0-1}K.$$

Dies geht natürlich für jede Zeile, und da wir k Zeilen haben, so ist die Summe der b-Paare sicher größer als $Kk\binom{k-2}{k_0-1}$; dies ist aber ein Widerspruch.

Ich setze nun in (9) $\mathfrak{K} = \mathfrak{x}$, $\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}) = t^\sigma - f^\sigma(\mathfrak{x})$, wenn $t^\sigma > f^\sigma(\mathfrak{x})$ und $\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}) = 0$ sonst. Es gilt noch nach Corput-Schaake [5]

$$\int_{R_n} \varphi(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} = \frac{n}{n+\sigma}\,t^{n+\sigma}J,$$

wo $J = \int_{f(\mathfrak{x})<1} d\mathfrak{x}$ ist. Dann folgt aus (9)

$$\int_K \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\left(t^\sigma - f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\right)d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Bezeichnen wir die Anzahl der Summanden der linken Summe mit l, so ist

$$\int_K \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\,d\mathfrak{x} = l\,t^\sigma \int_K \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2.$$

Wir beweisen nun

Satz 9. *Ist $f(\mathfrak{x})$ ω-konvex und*

$$\sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 > k_0\,t^\sigma \int_K \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} \tag{18}$$

oder schärfer

$$|a_0|^2 > k_0\,t^\sigma \int \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}. \tag{18a}$$

so gibt es mindestens k_0 von 0 verschiedene Gitterpunktpaare $\pm\mathfrak{g}_1, \ldots, \pm\mathfrak{g}_{k_0}$ so daß

$$f^\sigma(\mathfrak{g}_j) \leqq c\,t^\sigma$$

ist.

Bemerkung. Es ist $a_0 = \int_K \varphi(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x}$, also lautet (18a)

$$\int_K \varphi(\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} = \frac{n}{n+\sigma}\,t^{n+\sigma}J > k_0\,t^\sigma$$

oder

$$t > t_0 = \left(k_0 \frac{u+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Beweis. Benutzen wir (18), so folgt

$$\int_K \sum_{\mathfrak{r}} \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\, f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\, d\mathfrak{x} < (l-k_0)\, t^\sigma \int_K \overline{\varphi}(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}.$$

Es gibt daher ein $\mathfrak{x}'$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{r}} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}) < (l-k_0)\, t^\sigma$$

ist, also muß $l > k_0$, d. h. $l \geqq k_0 + 1$ sein. Dann kann ich aus den l Punkten $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}_j$ $k_0 + 1$ Punkte $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}_j'$ $(j = 0, 1, \ldots k_0)$ so herausgreifen, daß

$$f^\sigma(\mathfrak{r}_j' - \mathfrak{r}_0') \leqq \frac{c}{l-k_0} \sum_{s=1}^{l} f^\sigma(\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}_s) < c\, t^\sigma \qquad (j = 1, \ldots, k_0)$$

ist. Die Punkte $\mathfrak{r}_j' - \mathfrak{r}_0'$ sind alle voneinander verschieden, denn aus $\mathfrak{r}_j' - \mathfrak{r}_0' = \mathfrak{r}_i' - \mathfrak{r}_0'$ $(i \neq j)$ folgt $\mathfrak{r}_j' = \mathfrak{r}'$.

Satz 9a. *Satz 9 bleibt richtig, wenn in* (18a) *das Gleichheitszeichen gilt.* Den Beweis führt man in bekannter Weise so:

Ist q die positive untere Schranke von $f(\mathfrak{x})$ auf der Kugel $\mathfrak{x}^2 = 1$, so ist stets

$$f^\sigma(\mathfrak{x}) \geqq q\,(\mathfrak{x}^2)^{\frac{\sigma}{2}}.$$

Liegt ein Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ in $f^\sigma(\mathfrak{x}) < c\,t^\sigma$, dann liegt er auch in der Kugel $\mathfrak{x}^2 < \left(\frac{c\,t}{q}\right)^{\frac{2}{\sigma}}$. Nun gilt Satz 9 für alle $t_\varepsilon = (t_0^\sigma + \varepsilon)^{\frac{1}{\sigma}}$ $(\varepsilon > 0)$, d. h. zu diesen t_ε gibt es k_0 Gitterpunktpaare, die in $f^\sigma(\mathfrak{x}) < c\,t^\sigma$ und zugleich in der Kugel $\mathfrak{x}^2 < \left(\frac{c\,t}{q}\right)^{\frac{2}{\sigma}}$ liegen. Ich betrachte nun eine Nullfolge (ε_m). Zu jedem t_{ε_m} gehören nun k_0 Gitterpunktpaare $\neq \mathfrak{o}$. Nun liegen in einer Kugel nur endlich viele Gitterpunkte, also gibt es sicher eine Teilfolge (ε_m'), zu der dieselben k_0 Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{r}_i$ gehören. Es ist also

$$f^\sigma(\mathfrak{r}_i) < c\,t_0^\sigma + \varepsilon_m'\, c \qquad (i = 1, \ldots, k_0).$$

Nun ist die linke Seite von den ε_m' unabhängig, also ist

$$f^\sigma(\mathfrak{r}_i) \leqq c\,t_0^\sigma \qquad (i = 1, \ldots, k_0).$$

Satz 9 kann also so ausgesprochen werden: Ist $f(\mathfrak{x})$ ω-konvex, so gibt e wenigstens k_0 Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j$, so daß

$$f^o(\mathfrak{g}_j) \leqq c\, k_0^{\frac{\sigma}{n}} \binom{n+\sigma}{\sigma J}^{\frac{o}{n}} \qquad (j = 1, \ldots, k_0)$$

Für $k_0 = 1$ wurde der Satz von v. d. Corput-Schaake [5] bewiesen.

§ 8.

Alternativsatz für ω-konvexe Mengen.

Wir beweisen nun eine Verschärfung von Satz 7.

Satz 10. *Ist $f(\mathfrak{x})$ ω-konvex und gibt es höchstens $k_0 - r - 1$ von $\mathfrak{o}$ ver schiedene Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{r}_j$ $\left(0 \leqq r \leqq k_0 \quad \left[\frac{k_0}{2}\right] - 1\right)$, so daß*

$$f^o(\mathfrak{r}_j) < c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{o}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{o}{n}} \qquad j = 1, \ldots, k_0 - r -$$

so gibt es zu jedem $\mathfrak{x}_0$ mindestens $r+1$ Gitterpunkte $\mathfrak{r}_{j'}$, so daß

$$f^o(\mathfrak{r}_{j'} - \mathfrak{x}_0) \leqq c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{o}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{o}{n}} \qquad j' = 1, \ldots, r+$$

Es ist also die Bedingung $|a_0|^2 \geqq t^o k_0 \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}$ durch $|a_0|^2 \geqq \frac{k_0 t^o}{2} \int \varphi(\mathfrak{x})\, d$ ersetzt.

Beweis. Wir wenden wieder (9) an, und zwar einmal auf

$$\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{x}) = \begin{cases} t^o - f^o(\mathfrak{x}) & \text{wenn } t^o > f^o(\mathfrak{x}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und einmal auf

$$\psi(\mathfrak{x}) = \begin{cases} t^o - f^o(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) & \text{wenn } f^o(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0) < t^o \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und das obige $\varphi(\mathfrak{x})$.

Dann erhalten wir

$$\text{(19 a)} \qquad \sum_{\mathfrak{r}} \int_K \varphi(\mathfrak{x}) \left(t^o - f^o(\mathfrak{x} + \mathfrak{r})\right) d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 .$$

und

$$\text{(19 b)} \qquad \sum_{\mathfrak{r}'} \int_K \varphi(\mathfrak{x}) \left(t^o - f^o(\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}')\right) d\mathfrak{x} = \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}.$$

Die Anzahl der Summanden in (19a) sei l, die in (19b) l', also ist

$$\text{(20a)} \qquad \sum_{\mathfrak{r}} \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r})\, d\mathfrak{x} = l\, t^\sigma \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2,$$

$$\text{(20b)} \qquad \sum_{\mathfrak{r}'} \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}')\, d\mathfrak{x} = l'\, t^\sigma \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2\, e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}.$$

Es ist daher

$$\int_K \varphi(\mathfrak{x})\, [\sum_{\mathfrak{r}} f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r}+\mathfrak{x}_0)]\, d\mathfrak{x} = (l+l')\, t^\sigma \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x} - \\ - \sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 (1+e^{2\pi i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}).$$

Nun ist

$$|\sum_{\mathfrak{l}} |a_{\mathfrak{l}}|^2 (1+e^{2\eta i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0})| = |\, 2\,|a_0|^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2\, e^{2\mu i \mathfrak{l}\mathfrak{x}_0}| \\ \geqq 2\,|a_0|^2 + \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2 - \sum_{\mathfrak{l}\neq 0} |a_{\mathfrak{l}}|^2 = 2\,|a_0|^2 \geqq k_0\, t^\sigma \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x},$$

also

$$\int_K \varphi(\mathfrak{x})\, (\sum_{\mathfrak{r}} f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^\sigma(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}')) \leqq (l+l'-k_0)\, t^\sigma \int_K \varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}.$$

Nun gibt es wieder ein $\mathfrak{x}'$, so daß

$$\sum_{\mathfrak{r}} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}') \leqq (l+l'-k_0)\, t^\sigma.$$

Ist $\mathfrak{x}_0$ kein Gitterpunkt, so ist die linksstehende Summe größer als Null. Ist sie nämlich Null, so ist $\mathfrak{x}'+\mathfrak{r} = \mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}' = 0$, also $\mathfrak{x}_0$ Gitterpunkt. Für einen Gitterpunkt $\mathfrak{g}$ können wir aber sofort den Satz 10 beweisen. Es gibt ja nach Satz 9a $\left[\frac{k_0}{2}\right]$ Gitterpunktpaare $\pm \mathfrak{g}_j \left(j = 1, \ldots \left[\frac{k_0}{2}\right]\right)$, wenn $k_0 > 1$, so daß

$$f^\sigma(\mathfrak{g}_j) \leqq c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{\sigma}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{\sigma}{n}}.$$

Es gibt daher $2\left[\frac{k_0}{2}\right] + 1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}'$, nämlich $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \pm \mathfrak{g}_j$, so daß

$$f^\sigma(\mathfrak{g}-\mathfrak{g}') \leqq c \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\frac{\sigma}{n}} \left(\frac{n+\sigma}{\sigma J}\right)^{\frac{\sigma}{n}}$$

ist. Nun ist $2\left[\frac{k_0}{2}\right] + 1 \geqq k_0 - \left[\frac{k_0}{2}\right] \geqq r+1$ und damit Satz 10 für alle Gitterpunkte bewiesen. Ist $\mathfrak{x}_0$ kein Gitterpunkt, so ist also $l+l'-k_0 > 0$, also $l+l' \geqq k_0+1$. Aus den $l+l$ Punkten $\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}_j$ $(j = 1, \ldots, l)$ und $\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}_j'$ $(j' = 1, \ldots, l')$, die wir kurz mit $\mathfrak{y}_i$ $(i = 1, \ldots, l+l')$ bezeichnen, lassen sich k_0+1 Punkte $\mathfrak{y}_0', \mathfrak{y}_1', \ldots, \mathfrak{y}_{k_0}'$ herausgreifen, so daß

$$f^\sigma(\mathfrak{y}_i - \mathfrak{y}_0') \leqq \frac{c}{l+l'-k_0} \left(\sum_{\mathfrak{r}} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{r}) + \sum_{\mathfrak{r}'} f^\sigma(\mathfrak{x}'+\mathfrak{x}_0+\mathfrak{r}')\right) < c\, t^\sigma$$

ist. Nehmen wir an, $\mathfrak{y}_0'$ sei von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}$. Dann können höchstens $k_0 - r - 1$ Punkte $\mathfrak{y}_j'$ $(j \geqq 1)$ von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}_j$ sein. Denn sonst lägen mindestens $k_0 - r$ Gitterpunktpaare $\pm(\mathfrak{r}_j - \mathfrak{r}_0)$ in $f^\sigma(\mathfrak{x}) < c\,t^\sigma$. Also müssen $+1$ Punkte $\mathfrak{y}_j'$ $(j \geqq 1)$ von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{r}' + \mathfrak{x}_0$ sein. Dann gibt es also $r+1$ Gitterpunkte $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{r}_j' - \mathfrak{r}$, so daß $f^\sigma(\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{g}_j) < c\,t^\sigma$ ist. Analog schließt man, wenn $\mathfrak{y}_0'$ von der Form $\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{r}'$ ist.

Literatur.

[1] H. Minkowski, Über Geometrie der Zahlen. Ges. Abhandlungen **1**, S. 264.

[2] K. Mahler, Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper. Časopis **68**.

[3] C. Siegel, Über Gitterpunkte in konvexen Körpern. Acta Mathem. **65**.

[4] J. G. v. d. Corput, Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen I, II. Acta Arithm. **1**, S. 2.

[5] J. G. v. d. Corput und G. Schaake, Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. Acta Arithm. **2**.

[6] J. Heinhold, Zur Geometrie der Zahlen. Math. Zeitschr. **47** (1941), S. 198.

[7] L. J. Mordell, An arithmetical theorem of linear forms. Acta Arithm. **2**

(Eingegangen am 2. Dezember 1942.)

Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation

Von

Gustav Doetsch
ord. Professor der Mathematik
an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br.

(„Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften", Band XLVII)

Mit 18 Figuren. XVI, 436 Seiten. 1937. RM 34.50

Inhaltsübersicht:

I. Teil: **Allgemeine Theorie der Laplace-Transformation.** Grundbegriffe der Funktionalanalysis. — Geschichtliches über die Laplace-Transformation. — Definition und analytische Eigenschaften der Laplace-Transformation. — Allgemeine funktionentheoretische Eigenschaften der l-Funktionen. — Die im Unendlichen regulären l-Funktionen. — Die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation. — Andere Umkehrformeln für die Laplace-Transformation. — Die Abbildung der fundamentalen Operationen an Funktionen.

II. Teil: **Reihenentwicklungen.** Die Übertragung von Reihenentwicklungen.

III. Teil: **Asymptotisches Verhalten von Funktionen.** Abelsche und Tauber'sche Sätze. — Ein allgemeines Prinzip der asymptotischen Entwicklung und die verschiedenen Arten von Asymptotik. — Abelsche Asymptotik. — Tauber'sche Asymptotik. — Indirekte Abelsche Asymptotik.

IV. Teil: **Integralgleichungen.** Integralgleichungen vom reellen Faltungstypus. — Funktionalrelationen mit Faltungsintegralen, insbesondere transzendente Additionstheoreme. — Integralgleichungen und Funktionalrelationen vom komplexen Faltungstypus.

V. Teil: **Differentialgleichungen.** Gewöhnliche Differentialgleichungen. — Allgemeines über die Behandlung von partiellen Differentialgleichungen durch Funktionaltransformationen. — Die Wärmeleitungsgleichung (parabolischer Typ). — Die Telegraphengleichung und die Wellengleichung (hyperbolischer Typ). — Die Potentialgleichung (elliptischer Typ). — Gleichungen mit variablen Koeffizienten. — Die Beziehungen zum Heaviside-Kalkül und zur sogenannten funktionentheoretischen Methode. — Huygens'sches und Euler'sches Prinzip. — Anhang. — Historische Anmerkungen. — Literatur- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN

Atlas typischer Nebelkammerbilder

mit Einführung in die Wilsonsche Methode

Von

Dozent Dr. W. Gentner Dr. H. Maier-Leibnitz

Professor Dr. W. Bothe

(Institut für Physik im Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, Heidelberg)

Mit 18 Figuren und 125 Aufnahmen. V, 125 Seiten. 1940.
RM 21.60; Ganzleinen RM 25.80

Inhaltsübersicht:

Erster Teil: **Die Wilsonsche Nebelkammer.** Vorgeschichte der Wilsonkammer. — Theoretische Grundlagen. — Die Sichtbarmachung von Teilchenbahnen mit der Nebelkammer. — Weitere Entwicklung der Nebelkammertechnik. — Anhang: Allgemeines über Strahlenarten. — Literaturverzeichnis.

Zweiter Teil: **Nebelkammerbilder.** α-Strahlen. — β-Strahlen. — Das Positron. — Röntgenstrahlen. — γ-Strahlen. — Kernumwandlungen durch geladene Teilchen. — Das Neutron. — Die Spaltung des Urans. — Die künstliche Radioaktivität. — Einzelne Ultrastrahlen. — Kaskadenschauer. — Teilchenarme Schauer. — Luftschauer. — Explosionsschauer.

Aus den ersten Besprechungen:

Es war eine glückliche Idee, gerade im gegenwärtigen Augenblick eine Schrift über die Wilsonsche Nebelkammer mit erläuterten Nebelkammerbildern herauszubringen. Verdankt doch gerade die Kernphysik, die sich immer noch im Zustande stürmischer Entwicklung befindet, der Wilsonschen Methode die wertvollsten Entdeckungen. In der Tat ist die Nebelkammer das einzige Instrument, das mit dem Nachweis elementarer Teilchen auch die Festlegung des Ladungssinnes und der Bahnspur verknüpft.

Das Buch gehört zu denen, die man erst aus der Hand legt, wenn man sie von Anfang bis zu Ende durchgelesen hat. Die 42 Seiten des I. Teiles sind dem Aufbau und dem Zubehör der Wilsonkammer selbst gewidmet. Gleich die Einführung ist packend, wenn man die Vorgeschichte der Nebelkammer erfährt und dabei wieder einmal die alte Wahrheit bestätigt findet, daß nicht blinder Zufall, sondern jahrzehntelange geduldige Beschäftigung mit einer rein wissenschaftlichen Fragestellung zu einer schönen Entdeckung geführt haben, ohne daß Wilson sich etwa von vornherein die Aufgabe gestellt hätte, eine Vorrichtung zur Sichtbarmachung radioaktiver Teilchen und einzelner Atome zu erfinden. Im II. Teil, der 80 Seiten umfaßt, werden ausgewählte Nebelbilder von α- und β-Strahlen, Positronen, Röntgenstrahlen, γ-Strahlen, Neutronen, künstlichen Kernumwandlungen und Höhenstrahlen samt den merkwürdigen Schauererscheinungen wiedergegeben und besprochen. Die Erläuterungen der Bilder sind erschöpfend und doch Muster an Einfachheit, Klarheit und eindringlicher Kürze. Zusammen mit der hervorragend schönen Wiedergabe der Bilder leistet dieses Buch viel mehr, als der Titel erwarten läßt. Wir haben hier eine Einführung in die experimentelle Kernphysik vor uns, die schon lange ein Bedürfnis war und nicht nur den Spezialisten, sondern überhaupt den Physikern aller Richtungen und den physikalisch interessierten Chemikern hochwillkommen sein wird. Sorgfältige und umfassende Literaturangaben werden das Buch besonders denen ganz unentbehrlich machen, die sich in das Wilsonsche Nebelkammerverfahren einarbeiten wollen.

Professor Clusius, München, in „Die Naturwissenschaften"

S P R I N G E R – V E R L A G · B E R L I N

Springer-Verlag in Berlin W 9 — Verantwortlich für den Anzeigenteil: Albert Meyer, Berlin-Steglitz, Kühlebornweg 5 — Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig
Printed in Germany

Pl. 3